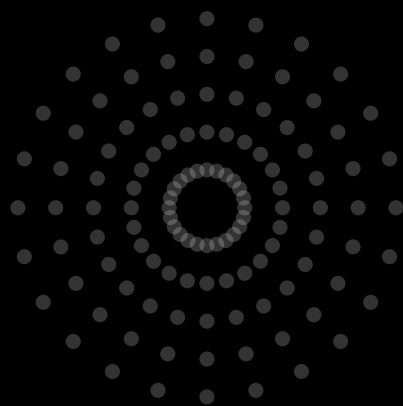
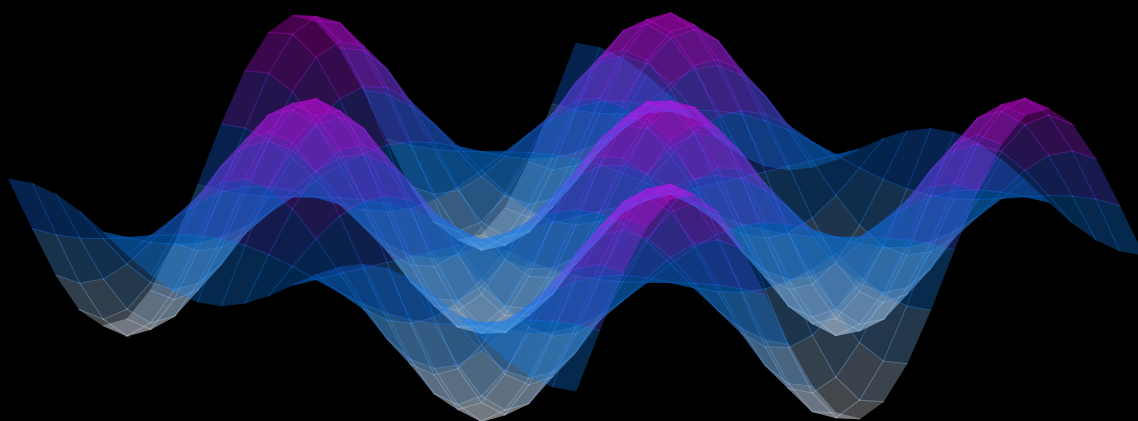




ĐỀ THI VÀ LỜI GIẢI **TOÁN CAO CẤP**

$$\begin{vmatrix} 9 & 8 & 9 \\ 0 & 9 & 6 \\ 0 & 0 & 25 \end{vmatrix} = \mathbf{2025}$$



$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda(g_0 - g(x, y))$$

TÀI LIỆU ĐƯỢC BIÊN SOẠN VÀ $\text{\LaTeX}$ BỞI MT4A

ĐỀ THI VÀ LỜI GIẢI TOÁN CAO CẤP QUA CÁC NĂM

Lữ Phúc - Gia Mẫn

Ngày 28 tháng 7 năm 2025

LỜI NÓI ĐẦU

Gửi mấy mom đang học Toán Cao cấp !

Tài liệu này mình làm ra vì thấy nhiều bạn đang gặp khó khăn với môn Toán Cao cấp. Có người ngay từ đầu đã sợ toán, có người thì không yếu nhưng học không vào. Và cũng có bạn chỉ muốn qua môn hoặc là cải thiện điểm số.

Thấy như vậy, mình quyết định ngồi lại, tổng hợp một tài liệu nhỏ – để hỗ trợ phần nào cho những bạn đang cần nó.

Tài liệu gồm có 2 phần chính

- Đề thi Toán Cao Cấp các năm cho sinh viên
- Lời giải chi tiết các đề thi từng câu bao gồm trắc nghiệm và tự luận.

Tài liệu này không dài, không học thuật, không lý thuyết nặng. Nó chỉ đơn giản là tổng hợp lại đề thi và lời giải. Dành cho ai đang cần ôn thi nhanh, học lại từ đầu, hoặc chỉ muốn làm vài đề để cảm thấy đỡ hoang mang.

Nếu bạn đọc tới đây thì cảm ơn bạn đã dành thời gian. Mong là bạn sẽ thấy nó có ích, dù chỉ một chút.

Chúc bạn học ổn, qua môn, và điểm kết thúc học phần như ý muốn nhé.

Lữ Võ Hoàng Phúc
Sinh viên K50 – UEH

Mục Lục

1

Bài viết 1

Người soạn: *Lữ Phúc - Gia Mẫn*

ĐỀ THI TOÁN CAO CẤP K46

1	Phần Trắc Nghiệm	1
2	Phần Tự Luận	2

3

Bài viết 2

Người soạn: *Lữ Phúc - Gia Mẫn*

ĐỀ THI TOÁN CAO CẤP K47

1	Phần Trắc Nghiệm	3
---	------------------	---

7

Bài viết 3

Người soạn: *Lữ Phúc - Gia Mẫn*

ĐỀ THI TOÁN CAO CẤP K49 MÃ ĐỀ 1

1	Phần Trắc Nghiệm	7
2	Phần Tự Luận	8

9

Bài viết 4

Người soạn: *Lữ Phúc - Gia Mẫn*

ĐỀ THI TOÁN CAO CẤP K49 MÃ ĐỀ 2

1	Phần Trắc Nghiệm	9
2	Phần tự luận	10

12

Bài viết 5

Người soạn: *Lữ Phúc - Gia Mẫn*

ĐỀ THI TOÁN CAO CẤP K50 ĐỢT 1

1	Phần Trắc Nghiệm	12
2	Phần Tự Luận	13

14

Bài viết 6

Người soạn: *Lữ Phúc - Gia Mẫn*

ĐỀ THI TOÁN CAO CẤP K50 ĐỢT 1 MÃ ĐỀ KHÁC

1	Phần Trắc Nghiệm	14
2	Phần Tự Luận	15

16

Bài viết 7

Người soạn: *Lữ Phúc - Gia Mẫn*

ĐỀ THI TOÁN CAO CẤP K50 ĐỢT 2

1	Phần Trắc Nghiệm	16
2	Phần Tự Luận	17

18

Bài viết 8

Người soạn: *Lữ Phúc - Gia Mẫn*

LỜI GIẢI TOÁN CAO CẤP K46

1	Phần Trắc Nghiệm	18
2	Phần Tự Luận	22

25

Bài viết 9

Người soạn: *Lữ Phúc - Gia Mẫn*

LỜI GIẢI TOÁN CAO CẤP K47

1	Phần Trắc Nghiệm	25
---	------------------	----

37

Bài viết 10

Người soạn: *Lữ Phúc - Gia Mẫn*

LỜI GIẢI TOÁN CAO CẤP K49 MÃ ĐỀ 1

1	Phần Trắc Nghiệm	37
2	Phần Tự Luận	42

45

Bài viết 11

Người soạn: *Lữ Phúc - Gia Mẫn*

LỜI GIẢI TOÁN CAO CẤP K49 MÃ ĐỀ 2

1	Phần Trắc Nghiệm	45
2	Phần Tự Luận	51

54

Bài viết 12

Người soạn: *Lữ Phúc - Gia Mẫn*

LỜI GIẢI TOÁN CAO CẤP K50 ĐỢT 1

1	Phần Trắc Nghiệm	54
2	Phần Tự Luận	58

61

Bài viết 13

Người soạn: *Lữ Phúc - Gia Mẫn*

LỜI GIẢI TOÁN CAO CẤP K50 ĐỢT 1 MÃ ĐỀ KHÁC

1	Phần Trắc Nghiệm	61
2	Phần Tự Luận	65

68

Bài viết 14

Người soạn: *Lữ Phúc - Gia Mẫn*

LỜI GIẢI TOÁN CAO CẤP K50 ĐỢT 2

1	Phần Trắc nghiệm	68
2	Phần Tự Luận	73

ĐỀ THI TOÁN CAO CẤP K46

1 Phần Trắc Nghiệm

☐ Câu 1. Cho hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} x + y + 2z = 2m \\ mx - y + 4z = -3 \\ 2mx - 3y + 4z = m \end{cases}$$

Hệ (I) có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi

- (A) $m \neq 4$. (B) $m \neq -4$. (C) $m \neq -2$. (D) $m \neq 2$.

☐ Câu 2. Trong mô hình Input-Output mở Leontief, cho ma trận hệ số đầu vào là

$$A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,3 & 0,3 \\ 0,2 & 0,2 & 0,2 \\ 0,3 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix}$$

Biết ngành 3 cung cấp 60 (đvt) cho ngành 1, khi đó ngành 1 phải cung cấp cho chính nó

- (A) 20. (B) 10. (C) 40. (D) 30.

☐ Câu 3. Cho A là một ma trận vuông cấp 4. Ký hiệu P_A là ma trận phụ hợp của A . Biết rằng $|P_A| = 8$, thì

- (A) $|3A| = 6$. (B) $|3A| = 18$. (C) $|3A| = 54$. (D) $|3A| = 162$.

☐ Câu 4. Cho $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & m & 3 \end{pmatrix}$. Đặt $B = (A - I)^2$. Khi đó, B suy biến khi và chỉ khi

- (A) $m = \pm 2$. (B) $m = -2$. (C) $m = 2$. (D) không tồn tại m .

☐ Câu 5. Cho $x > 0$ và $y = \frac{x}{\sqrt{x+30}}$. Hệ số co giãn của y đối với x tại $x = 30$ là

- (A) $\frac{4}{3}$. (B) $\frac{3}{4}$. (C) 3. (D) $\frac{1}{3}$.

☐ Câu 6. Gọi P là giá bán và $C = C(Q)$ là hàm chi phí, với Q là mức sản lượng. Biết rằng $P \cdot Q = 500$ và chi phí biên tại $Q = 10$ là 10. Khi đó $\frac{dC}{dP}$ tại $Q = 10$ là

- (A) -2. (B) -4. (C) -12. (D) -24.

☐ Câu 7. Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân $y'' - 4y' - 5y = 7x \cos x$ có dạng

- (A) $u(x) = (mx + n) \cos x + (px + q) \sin x$ với m, n, p, q là các hằng số.

- (B) $u(x) = ae^{-x} + be^{5x} + (mx^2 + nx) \cos x + (px^2 + qx) \sin x$ với a, b, m, n, p, q là các hằng số.
 (C) $u(x) = ae^{-x} + be^{5x} + (mx^2 + nx) \cos x$ với a, b, m, n là các hằng số.
 (D) $u(x) = ae^{-x} + be^{5x} + (mx + n) \cos x + (px + q) \sin x$ với a, b, m, n, p, q là các hằng số.

☐ **Câu 8.** Xét phương trình vi phân $y' - 2y = 2xe^{2x}$ (1). Phát biểu nào sau đây là sai ?

- (A) Phương trình (1) có một nghiệm riêng $y = x^2e^{2x}$.
 (B) Phương trình (1) có một nghiệm riêng $y = x^2e^{2x} - 3e^{2x}$.
 (C) Mọi nghiệm $y(x)$ của phương trình (1) có tính chất $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 0$.
 (D) Mọi nghiệm $y(x)$ của phương trình (1) có tính chất $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = 0$.

☐ **Câu 9.** Cho hàm $f(x, y) = -4x^2 - 4y^2 + 72 \ln(xy)$. Kết luận nào sau đây là đúng ?

- (A) f không có cực trị. (B) f chỉ có cực đại.
 (C) f chỉ có cực tiểu. (D) f có cả cực đại và cực tiểu.

☐ **Câu 10.** Cho g là hàm khả vi trên $\mathbb{R}$ và đặt $f(x, y) = -y + g(-x^2 + y^2)$ với $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Chọn kết quả đúng:

- (A) $y \cdot f'_x(x, y) + x \cdot f'_y(x, y) = -x$. (B) $y \cdot f'_x(x, y) + x \cdot f'_y(x, y) = -y$.
 (C) $y \cdot f'_x(x, y) + x \cdot f'_y(x, y) = x$. (D) $y \cdot f'_x(x, y) + x \cdot f'_y(x, y) = y$.

2 Phần Tự Luận

☐ **Câu 1.** Cho hệ phương trình tuyến tính (I).

$$\begin{cases} x - y - z = 4 \\ x - my + z = -4m \\ -x + y + mz = -4m \end{cases} \quad (\text{với } m \text{ là tham số thực}).$$

Tìm m để hệ (I) có vô số nghiệm và tìm nghiệm tổng quát của hệ (I) trong trường hợp đó.

☐ **Câu 2.** Cho hàm số

$$f(x, y) = 2x + 3y$$

Dùng phương pháp nhân tử Lagrange, hãy tìm cực trị của f với ràng buộc $2x^2 + y^2 = 44, \forall y > 0$.

☐ **Câu 3.** Cho phương trình vi phân

$$y'' - 5y' + 4y = 8x^2 - 4x + 4 \quad (1)$$

Tìm nghiệm $y(x)$ của phương trình (1) thỏa mãn điều kiện $y(0) = 6, y'(0) = -1$.

ĐỀ THI TOÁN CAO CẤP K47

1 Phần Trắc Nghiệm

☐ Câu 1. Xét các ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Khi đó, $\det(AB - B^2)$ là

- ☐ (A) $-2m - 14$. ☐ (B) $-2m + 14$. ☐ (C) $2m - 14$. ☐ (D) Một kết quả khác.

☐ Câu 2. Với x là ẩn số thực, xét ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x & -1 & -1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Tìm số nghiệm thực của phương trình $\det(A) = 0$.

- ☐ (A) Vô nghiệm. ☐ (B) Một nghiệm. ☐ (C) Hai nghiệm. ☐ (D) Vô số nghiệm.

☐ Câu 3. Cho A, B, C là các ma trận vuông cấp 3 và

$$\det(A) = 2, \quad \det(B) = 4, \quad \det(C) = -4.$$

Đặt ma trận $D = A^2 \cdot B^{-1} \cdot C^T$. Khi đó $\det(2D^{-1})$ bằng

- ☐ (A) -2 . ☐ (B) -0.25 . ☐ (C) -4 . ☐ (D) Một kết quả khác.

☐ Câu 4. Cho A là ma trận vuông cấp 4 khả nghịch thỏa mãn

$$A + 2A^T = 6I$$

với I là ma trận đơn vị cùng cấp với A . Chọn phát biểu sai.

- ☐ (A) $\det(A) = 2$. ☐ (B) $A = A^T$. ☐ (C) $A^2 = 4I$. ☐ (D) $2A^{-1} = I$.

☐ Câu 5. Cho ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & m \end{pmatrix}.$$

Khi A khả nghịch, ta viết

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Chọn kết quả sai.

- Ⓐ $a_{32} = 1$. Ⓑ $a_{22} = 1$. Ⓒ $a_{23} = -1$. Ⓓ $\det(A) = 4 - 3m$.

📌 **Câu 6.** Cho A là ma trận vuông cấp 4. Ký hiệu P_A là ma trận phụ hợp của A . Cho biết

$$\det(-P_A) = 64$$

Khi đó $\det(2A)$ bằng

- Ⓐ 64. Ⓑ -64. Ⓒ 32. Ⓓ Một kết quả khác.

📌 **Câu 7.** Xét ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 2 & m & -1 \\ -1 & m+1 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tìm m để hạng của A bằng 3.

- Ⓐ Không tồn tại $m \in \mathbb{R}$. Ⓑ $m = -1$.
Ⓒ $m = -2$. Ⓓ $\forall m \in \mathbb{R}$.

📌 **Câu 8.** Tìm m để hệ phương trình tuyến tính sau đây có vô số nghiệm:

$$\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ 4x + my + 2z = 2 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$$

- Ⓐ $m = 2$. Ⓑ $m = -2$.
Ⓒ $m = \pm 1$. Ⓓ Không tồn tại $m \in \mathbb{R}$.

📌 **Câu 9.** Cho các hệ phương trình tuyến tính

$$(I) : A \cdot X = B \text{ (có } n \text{ ẩn số)} \text{ và } (II) : A \cdot X = 0$$

với A là ma trận vuông cấp n thỏa mãn $A^2 = 0$. Chọn kết luận sai.

- Ⓐ Hệ (I) có nghiệm duy nhất.
Ⓑ Hệ (II) có vô số nghiệm.
Ⓒ $(A^T)^2 = 0$.
Ⓓ $A + I$ là ma trận khả nghịch, với I là ma trận đơn vị cùng cấp với A .

📌 **Câu 10.** Trong mô hình Input-Output mở Leontief, xét ma trận hệ số đầu vào

$$A = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.1 & 0.3 \\ 0.3 & 0.2 & 0.2 \\ m & 0.3 & 0.2 \end{pmatrix}$$

Cho biết sản lượng của ngành 1 là 200 và yêu cầu cuối của ngành 1 là 60. Tìm lượng nguyên liệu của ngành 3 cung cấp cho ngành 1.

- Ⓐ 30. Ⓑ 45. Ⓒ 60. Ⓓ 75.

📌 **Câu 11.** Tính đạo hàm của hàm $y = f(x) = x^{x+1}$.

- Ⓐ $x^x(\ln x + 1 + x)$. Ⓑ $x^x(\ln x + 1)$. Ⓒ $x^x(\ln x + x)$. Ⓓ Một kết quả khác.

☐ **Câu 12.** Cho hàm số $y = 8\sqrt{x+8}$. Tìm biên tế của y theo x khi hệ số co giãn của y theo x bằng 0.25.

- (A) 1.00. (B) 1.25. (C) 1.50. (D) Một kết quả khác.

☐ **Câu 13.** Gọi P, Q lần lượt là giá bán và mức sản lượng, $C(Q)$ là hàm chi phí. Cho biết $P \cdot Q = 250$ và $\frac{dC}{dP}$ tại $Q = 25$ là -0.5 . Hãy tính chi phí biên theo sản lượng Q khi $Q = 25$.

- (A) 0.2. (B) 0.3. (C) 0.4. (D) Một kết quả khác.

☐ **Câu 14.** Xét hàm hai biến

$$f(x, y) = \ln(2xy) - 2xy + 2y^2 - 6y + 1$$

Gọi H là ma trận Hess của hàm $f(x, y)$. Tìm y thỏa mãn $\det(H) = -4$.

- (A) $y = \pm 0.5$. (B) $y = \pm 1$.
(C) $y = \pm 2$. (D) Các câu kia đều sai.

☐ **Câu 15.** Xét hàm hai biến

$$f(x, y) = x^3 + y^4 - 3mx - 4y \quad (\text{với } m > 0)$$

Chọn phát biểu sai.

- (A) Hàm $f(x, y)$ có cực đại. (B) Hàm $f(x, y)$ có cực tiểu.
(C) Hàm $f(x, y)$ chỉ có một cực trị. (D) Hàm f có hai điểm dừng.

☐ **Câu 16.** Cho hàm sản lượng Q của một xí nghiệp là

$$Q(L, K) = 2L + 3\sqrt{LK}$$

Với L là lượng lao động và K là lượng vốn. Tại thời điểm $L = 25, K = 100$, xí nghiệp giảm lượng lao động 1 đơn vị. Để sản lượng tăng thêm 1 đơn vị, xí nghiệp cần tăng lượng vốn xấp xỉ là kết quả nào sau đây?

- (A) 12. (B) 18. (C) 20. (D) Một kết quả khác.

☐ **Câu 17.** Xét hàm phụ Lagrange

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda [16 - g(x, y)]$$

trong đó

$$f(x, y) = 3x^2 - 5xy, \quad g(x, y) = 2x - 2y$$

Cho biết $M(10, 2, k)$ là điểm dừng của hàm L . Ký hiệu H_b là ma trận Hess biên tại điểm M . Chọn kết quả đúng.

- (A) $k = 25$. (B) $k = 50$. (C) $|H_b| = 4$. (D) $|H_b| = -4$.

☐ **Câu 18.** Xét phương trình vi phân

$$y' - 3y = -6 \quad (*)$$

và gọi $Y(x)$ là nghiệm tổng quát của phương trình (*). Chọn phát biểu sai.

- (A) $\lim_{x \rightarrow +\infty} Y(x) = 2$.
 (B) $\lim_{x \rightarrow -\infty} Y(x) = 2$.
 (C) Hàm $Y(x) = 2 - e^{3x}$ là một nghiệm của phương trình (*).
 (D) Phương trình (*) có một nghiệm riêng là hàm hằng.

☐ **Câu 19.** Xét phương trình vi phân

$$y'' - 6y' + 5y = 2y' - 11y \quad (*)$$

Nghiệm tổng quát của (*) là

- (A) $y(x) = C_1 e^{4x} + x C_2 e^{4x} \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$.
 (B) $y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{5x} \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$.
 (C) $y(x) = C_1 e^{-4x} + C_2 x e^{-4x} \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$.
 (D) $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-5x} \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$.

☐ **Câu 20.** Xét phương trình vi phân

$$y'' + x^2 = y \quad (*)$$

Nghiệm tổng quát của phương trình (*) là

- (A) $f(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + x^2 + 2 \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$.
 (B) $f(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - x^2 + 2 \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$.
 (C) $f(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^x + x^2 - 2 \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$.
 (D) $f(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^x - x^2 - 2 \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$.

ĐỀ THI TOÁN CAO CẤP K49

MÃ ĐỀ 1

1 Phần Trắc Nghiệm

☐ Câu 1. Cho $y = y(x)$ là hàm ẩn xác định bởi phương trình $4x^2 + xy^3 - 5x + 3y + 4ye^x - 7 = 0$. Đạo hàm của y tại $x = 0$ có giá trị là

- (A) 0. (B) 1. (C) $-\frac{5}{7}$. (D) $\frac{4}{7}$.

☐ Câu 2. Cho A, B, C là các ma trận vuông cấp 3. Giả sử $|A| = -2$, $|B| = 3$, $|C| = -4$. Định thức của ma trận $2A^3B^TC^{-1}$ có giá trị là

- (A) -48 . (B) 48 . (C) 16 . (D) 3 .

☐ Câu 3. Cho hàm số $z = f(x, y) = 4x^2 + y^2 - 4mx - 2my + 2m^2 + 2m - 1$ (m là tham số). Tìm m để giá trị nhỏ nhất của f , trên toàn bộ mặt phẳng, lớn hơn hay bằng 5.

- (A) Không tồn tại m . (B) $m \geq 2$. (C) $m \geq 3$. (D) $m = 1$.

☐ Câu 4. Xét phương trình vi phân $y' - 3y = 2xe^{3x}$. Phát biểu nào sau đây là đúng?

- (A) Nghiệm tổng quát của phương trình là $y = (3x^2 + C)e^{3x}$.
(B) Nghiệm riêng thỏa điều kiện $y(0) = 2$ của phương trình là $y = (x^2 - 3)e^{3x}$.
(C) Nghiệm riêng thỏa điều kiện $y(0) = 1$ của phương trình là $y = (-3x^2 + 1)e^{3x}$.
(D) Nghiệm riêng thỏa điều kiện $y(1) = 2e^3$ của phương trình là $y = (x^2 + 1)e^{3x}$.

☐ Câu 5. Cho A là ma trận vuông cấp 3, không suy biến. Giả sử B là ma trận phù hợp của A và $|B| = 16$. Phát biểu nào sau đây là đúng?

- (A) $BA = -4$. (B) $AB = I_3$. (C) $BA = \pm \frac{1}{4}I_3$. (D) $AB = \pm 4I_3$.

☐ Câu 6. Xét mô hình input-output gồm ba ngành kinh tế với ma trận hệ số đầu vào là

$$A = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,4 & m \\ 0,3 & 0,2 & 0,1 \\ 0,2 & 0,1 & 0,3 \end{bmatrix}$$

- Giá trị sản lượng của 3 ngành lần lượt là 210, 200, 180.
- Tổng giá trị nguyên liệu đầu vào của ngành 3 là 108.

Tính tổng giá trị nguyên liệu mà ngành 1 cung cấp cho cả ba ngành.

- (A) 142. (B) 154. (C) 164. (D) 137.

☐ **Câu 7.** Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ m & 3 & 3 \end{bmatrix}$. Khi đó $(A - I_3)^2$ suy biến khi và chỉ khi

- (A) $m = 10$. (B) $m = -15$. (C) $m = 11$. (D) $m = -11$.

☐ **Câu 8.** Một nhà máy sản xuất một mặt hàng, sử dụng nguyên liệu thô là thép. Hàm doanh thu được xác định bởi $R = 36x^{2/3}y^{1/3}$, trong đó x là số giờ lao động và y là số tấn thép được sử dụng. Khi $x = 8$ và $y = 125$, phát biểu nào sau đây là đúng ?

- (A) Nếu lượng thép giảm 6% và số giờ lao động không đổi thì doanh thu giảm xấp xỉ 4%.
 (B) Nếu giảm 1 tấn thép và số giờ lao động không đổi thì doanh thu giảm xấp xỉ 5 đơn vị.
 (C) Nếu tăng thêm 1 giờ lao động và lượng thép không đổi thì doanh thu tăng xấp xỉ 80 đơn vị.
 (D) Nếu giờ lao động tăng 6% và lượng thép không đổi thì doanh thu tăng xấp xỉ 4%.

☐ **Câu 9.** Cho A là ma trận vuông cấp n , khả nghịch. Giả sử B là ma trận nhận được từ A bằng cách

thay dòng 1 bằng cách lấy -2 nhân với dòng 1 rồi cộng với 3 lần dòng 2.

Phát biểu nào sau đây là sai ?

- (A) Hệ $AX = 0$ có vô số nghiệm $\Rightarrow$ hệ $BX = 0$ có vô số nghiệm.
 (B) $\det(A^T) = \det(B)$.
 (C) $\text{rank}(-2A) = \text{rank}(B)$.
 (D) $\text{rank}(A) = \text{rank}(-2B)$.

☐ **Câu 10.** Giả sử hàm chi phí sản xuất của một xí nghiệp là $C = C(Q)$, với Q là sản lượng, có đạo hàm tại mọi $Q > 0$. Biết rằng chi phí trung bình $\bar{C} = \frac{C(Q)}{Q}$ đạt giá trị nhỏ nhất là 20000 khi $Q = Q_0 = 400$. Xác định chi phí biên tại Q_0 .

- (A) 20000. (B) 25000.
 (C) 50. (D) Chưa đủ điều kiện để xác định.

2 Phần Tự Luận

☐ **Câu 1.** Giải và biện luận hệ phương trình sau theo tham số m

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ 2x + my + mz = 3 \\ 3x + (m+1)y + 5z = 4 \end{cases}$$

☐ **Câu 2.** Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân $y'' + 3y' - 4y = e^{-4x}$.

☐ **Câu 3.** Một nhà máy sản xuất một loại hàng hóa với một loại nguyên liệu đầu vào A . Nếu l là số giờ lao động và k là số đơn vị nguyên liệu A được sử dụng thì sản lượng ước tính là

$$Q(l, k) = 20l + 25k - l^2 - 3k^2$$

Chi phí cho mỗi giờ lao động là 2 và chi phí cho mỗi đơn vị nguyên liệu A là 4. Nếu sử dụng hết lượng ngân sách là 50 đơn vị tiền để sản xuất, hãy xác định l và k để sản lượng thu được là lớn nhất.

ĐỀ THI TOÁN CAO CẤP K49

MÃ ĐỀ 2

1 Phần Trắc Nghiệm

☐ **Câu 1.** Xét ma trận $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ m & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix}$ với $m \in \mathbb{R}$. Khi đó, ma trận $A^2 - A$ suy biến khi và chỉ khi

☐ (A) $m = -3/4$.

☐ (B) $m = -4/3$.

☐ (C) Với mọi $m \in \mathbb{R}$.

☐ (D) $m = -4/3 \vee m = 0$.

☐ **Câu 2.** Cho A là một ma trận vuông cấp $n \geq 2$. Ký hiệu P_A là ma trận phủ hợp của ma trận A . Cho biết $\det(P_A) = -27$ và $\det(2A) = -48$. Hãy chọn kết quả đúng.

☐ (A) $|A| = -6$.

☐ (B) $|A| = -12$.

☐ (C) $n = 4$.

☐ (D) $n = 3$.

☐ **Câu 3.** Cho A, B, C là các ma trận vuông cấp 4 thỏa mãn

$$|A| = -3, \quad |B| = 2, \quad |C| = 4.$$

Đặt ma trận $M = 2A^2 \cdot B^T \cdot C^{-1}$. Chọn kết quả đúng.

☐ (A) $|M| = 144$.

☐ (B) $|M| = 72$.

☐ (C) $|M| = 36$.

☐ (D) $|M| = 9$.

☐ **Câu 4.** Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ m & -1 & 1 \end{pmatrix}$ với $m \in \mathbb{R}$. Khi A khả nghịch, ta đặt $A^{-1} = (b_{ij})_{3 \times 3}$.

Hãy chọn phát biểu đúng.

☐ (A) $b_{23} = 1$.

☐ (B) $b_{32} = -1$.

☐ (C) $b_{22} = m$.

☐ (D) $\det(A) = m$.

☐ **Câu 5.** Xét mô hình Input – Output mở Leontief có ba ngành với ma trận hệ số đầu vào

$$A = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.3 & 0.2 \\ 0.6 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.3 & 0.3 \end{pmatrix}$$

Gọi x_1, x_2, x_3 lần lượt là giá trị sản lượng của ba ngành. Nhờ cải tiến kĩ thuật nên ngành 1 tiết kiệm được $\frac{1}{3}$ nguyên liệu của ngành 2. Khi nhu cầu cuối cùng của ngành mở đối với 3 ngành lần lượt là 75, 90, 81. Hãy chọn kết quả đúng.

☐ (A) $x_1 + x_2 + x_3 = 810$.

☐ (B) $x_1 = 270$.

☐ (C) $x_2 = 260$.

☐ (D) $x_3 = 250$.

☐ **Câu 6.** Cho ma trận A vuông cấp 3 có hạng là $R(A) \leq 2$. Hãy chọn phát biểu sai.

- (A) Ma trận $A^2 - 2A$ suy biến.
 (B) Ma trận $A^3 + 3A$ khả nghịch.
 (C) $\det(A^T \cdot A^5) = 0$.
 (D) Hệ phương trình tuyến tính $AX = 0$ có vô số nghiệm.

☐ **Câu 7.** Hàm chi phí là $C(q)$ với q là mức sản lượng. Ký hiệu $\bar{c}(q) = \frac{C(q)}{q}$ là hàm chi phí trung bình theo q . Biết rằng khi $q = 10$ thì hệ số co giãn của chi phí theo q là 1 và chi phí trung bình là 40. Hãy tính chi phí biên theo q khi $q = 10$.

- (A) 80. (B) 60. (C) -40. (D) 20.

☐ **Câu 8.** Xét hàm lợi nhuận $\pi(L, K) = 3L^{1/3}K^{1/3} - L - 0.04K$. Ma trận Hess của hàm lợi nhuận là

$$H = \begin{pmatrix} \pi''_{LL} & \pi''_{LK} \\ \pi''_{KL} & \pi''_{KK} \end{pmatrix}$$

Biết rằng hàm lợi nhuận $\pi(L, K)$ đạt giá trị lớn nhất tại $(L, K) = (L_0, K_0)$. Hãy chọn phát biểu đúng.

- (A) $\pi''_{LL}(L, K) = \frac{2}{3}L^{-5/3}K^{1/3}$. (B) $\det(H) = \frac{5}{9}L^{-4/3}K^{-4/3}$.
 (C) $L_0 + K_0 = 600$. (D) $\frac{L_0}{K_0} = 25^3$.

☐ **Câu 9.** Một xí nghiệp có hàm năng suất $Q(x, y) = 7x^{1/2}y^{1/3}$ với x, y lần lượt là lượng nguyên liệu thứ nhất, thứ hai. Ký hiệu $\varepsilon_x Q(x_0, y_0), \varepsilon_y Q(x_0, y_0)$ lần lượt là hệ số co giãn của Q theo x , theo y tại điểm (x_0, y_0) . Hãy chọn kết quả đúng.

- (A) $\varepsilon_x Q(27, 4) = \frac{7}{2}$. (B) $\varepsilon_y Q(27, 4) = \frac{1}{3}$. (C) $\varepsilon_x Q(9, 8) = \frac{1}{3}$. (D) $\varepsilon_y Q(9, 8) = \frac{1}{2}$.

☐ **Câu 10.** Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân $y' + \frac{y}{x} = \frac{\cos x}{x}$ là

- (A) $y = \frac{C}{x} - \frac{\sin x}{x}$, với $C \in \mathbb{R}$. (B) $y = Cx - x \cdot \sin x$, với $C \in \mathbb{R}$.
 (C) $y = \frac{C}{x} + \frac{\sin x}{x}$, với $C \in \mathbb{R}$. (D) $y = Cx + x \cdot \cos x$, với $C \in \mathbb{R}$.

2 Phần tự luận

☐ **Câu 1.** Xét hệ phương trình tuyến tính:

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = -1 \\ 2x + 3y + mz = 0 \\ x + my - z = 1 \end{cases} \quad (1), \text{ với } m \in \mathbb{R}.$$

- a. Tìm m để hệ (1) có nghiệm duy nhất.
 b. Tìm m để hệ (1) có vô số nghiệm. Hãy tìm nghiệm tổng quát trong trường hợp này.

☐ **Câu 2.** Xét phương trình vi phân $y'' + y = x^2 - 3$ (★)

- a. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình (★).

b. Tìm nghiệm $y(x)$ của phương trình $(\star)$ thoả $y(0) = 2, y'(0) = -1$.

📌 **Câu 3.** Dùng phương pháp nhân tử Lagrange, hãy tìm cực trị của hàm $f(x, y) = 2x + y + 1$ thoả mãn điều kiện $x^{1/2}y^{1/2} = 4$.

ĐỀ THI TOÁN CAO CẤP K50

ĐỢT 1

1 Phần Trắc Nghiệm

☐ Câu 1. Hàm tổng chi phí khi sản xuất một sản phẩm cho bởi $c = \frac{5q^2}{\sqrt{q^2 + 3}} + 5000$, với q là sản lượng. Tính chi phí biên khi $q = 10$ (làm tròn kết quả đến 2 chữ số thập phân).

- (A) 4, 12. (B) 5, 07. (C) 5, 84. (D) 4, 93.

☐ Câu 2. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} -4 & -3 & x \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ với x là một số thực và P_A là ma trận phụ hợp của A . Giả sử $P_A = A$. Chọn phát biểu đúng.

- (A) $|A| = 1$. (B) $|A| = -7$. (C) $|A| = 25$. (D) $|A| = 33$.

☐ Câu 3. Cho các ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ m & 5 & 6 \end{pmatrix}$ và $B = A^2 - A$. Tìm các giá trị của m để B khả nghịch.

- (A) $m \neq 0$. (B) $m \neq 4$. (C) m tùy ý. (D) $m \neq 0$ và $m \neq 4$.

☐ Câu 4. Giả sử giá trị lớn nhất của hàm số $z = f(x, y) = -x^2 - xy - y^2 + 3x + my - 2m$ (m là tham số) bằng z_M và đạt được tại điểm $(1, 1)$. Chọn phát biểu đúng.

- (A) $z_M = 3$. (B) $z_M = -3$. (C) $z_M = -4$. (D) $z_M = 4$.

☐ Câu 5. Chi tiêu C của một thành phố phụ thuộc vào thu nhập I của thành phố đó. Mỗi liên hệ được xác định bởi phương trình $C^2 + \frac{1}{4}I^2 = IC + \frac{3}{2}I$. Biết rằng phần chi tiêu lớn hơn 50% thu nhập. Tính giá trị chi tiêu biên (biên tế của hàm chi tiêu) khi $I = 24$.

- (A) $MC = \frac{3}{4}$. (B) $MC = \frac{1}{4}$. (C) $MC = \frac{3}{8}$. (D) $MC = \frac{5}{8}$.

☐ Câu 6. Cho hệ phương trình tuyến tính $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + 5y + 8z = 4 \\ x + 3y + mz = 4 \end{cases}$ với $m \in \mathbb{R}$ là một tham số. Phát biểu nào sau đây là sai ?

- (A) Hệ có nghiệm với mọi m . (B) Không có m để hệ có vô số nghiệm.
(C) Tồn tại m để hệ có nghiệm. (D) Tồn tại m để hệ có nghiệm duy nhất.

☐ **Câu 7.** Xét mô hình Input-Output gồm ba ngành với ma trận hệ số đầu vào

$$\begin{pmatrix} 0,1 & 0,4 & 0,2 \\ 0,3 & 0,2 & m \\ 0,2 & 0,1 & 0,3 \end{pmatrix}$$

với $m \in \mathbb{R}$ là tham số. Biết rằng giá trị sản lượng của ba ngành lần lượt là 200, 240, 120, và giá trị nguyên liệu ngành 2 cung cấp cho ngành 3 bằng hai lần giá trị nguyên liệu ngành 3 cung cấp cho ngành 2. Tính tổng giá trị nguyên liệu đầu vào của ngành 3.

- (A) 66. (B) 100. (C) 84. (D) 108.

☐ **Câu 8.** Cho A là ma trận vuông cấp 3 thỏa mãn $A^T \cdot P_A = 4I_3$, trong đó P_A là ma trận phụ hợp của A . Khi đó $\det \left[\left(\frac{1}{4}A \right)^{-1} \right]$ là:

- (A) 1. (B) $\frac{1}{64}$. (C) $4 \left(\frac{3}{4} \right)$. (D) 16.

☐ **Câu 9.** Xét hàm sản xuất $Q = K^{0,25} L^{0,75}$, trong đó Q là sản lượng, K là lượng vốn và L là lượng lao động. Ký hiệu MQK và MQL lần lượt là sản lượng biên theo vốn và theo lao động. Phát biểu nào sau đây là sai?

- (A) Khi $K = L$ thì $MQK < MQL$. (B) Khi $K < L$ thì $MQK < \frac{1}{4}$.
(C) Khi $K = L$ thì $MQK + MQL = 1$. (D) Khi $K < L$ thì $MQL < \frac{3}{4}$.

☐ **Câu 10.** Xét phương trình vi phân $y' - \frac{y}{x} = x \sin x$. Phát biểu nào sau đây là đúng?

- (A) Mọi nghiệm của phương trình thỏa $y(-x) = y(x)$.
(B) Phương trình có nghiệm riêng $y = x \sin x$.
(C) Mọi nghiệm của phương trình thỏa $y(-x) = -y(x)$.
(D) Phương trình có nghiệm riêng $y = x \cos x$.

2 Phần Tự Luận

☐ **Câu 1.** Tìm giá trị của tham số m để hệ phương trình $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 3y - z = 2 \\ x + my - 2z = 1 \end{cases}$ có vô số nghiệm và tìm nghiệm tổng quát trong trường hợp đó.

☐ **Câu 2.** Một doanh nghiệp sản xuất hai loại sản phẩm A và B . Hàm lợi nhuận của doanh nghiệp được cho bởi $\pi(x, y) = 10x + 15y - x^2 - y^2 - xy$, trong đó x và y là lượng sản phẩm A và B tương ứng được sản xuất. Doanh nghiệp phải tuân thủ một ràng buộc về nguồn lực $2x + y = 100$. Hãy tìm mức lợi nhuận lớn nhất có thể bằng cách sử dụng phương pháp nhân tử Lagrange.

☐ **Câu 3.** Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân $y'' - 4y' + 4y = (x + 2)e^{3x}$.

ĐỀ THI TOÁN CAO CẤP K50

ĐỢT 1 MÃ ĐỀ KHÁC

1 Phần Trắc Nghiệm

☐ Câu 1. Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân $y' + \frac{y}{x} = \frac{\sin x}{x}$ là

- (A) $\frac{C + \cos x}{x}, C \in \mathbb{R}.$ (B) $x(C + \cos x), C \in \mathbb{R}.$
(C) $\frac{C - \cos x}{x}, C \in \mathbb{R}.$ (D) $x(C + \sin x), C \in \mathbb{R}.$

☐ Câu 2. Cho $g(x) = f(x^3 - 3x)$ khả vi trên $\mathbb{R}$ và $f'(x) > 0, \forall x$. Chọn phát biểu đúng.

- (A) Hàm g đạt cực đại tại -1 . (B) Hàm g đạt cực đại tại 1 .
(C) Hàm g tăng trên $(0, +\infty)$. (D) Hàm g giảm trên $(-\infty, -3)$.

☐ Câu 3. Cho A và B là các ma trận vuông cấp n thỏa $A^2 = I_n = B^2$. Chọn phát biểu sai.

- (A) $(AB)^{-1} = BA.$ (B) $AB^{-1} = A^{-1}B.$
(C) $A = \pm B.$ (D) $|\det(A)| = |\det(B)|.$

☐ Câu 4. Giả sử giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$z = f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - my + 2m \quad (m \text{ là tham số})$$

có giá trị bằng z_M và đạt được tại điểm $M(1, 1)$. Chọn phát biểu đúng.

- (A) $z_M = 3.$ (B) $z_M = 4.$ (C) $z_M = -3.$ (D) $z_M = -4.$

☐ Câu 5. Trong mô hình Input - Output mở, cho ma trận hệ số đầu vào

$$A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,3 & 0,3 \\ 0,2 & 0,2 & 0,2 \\ 0,3 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix}$$

Biết ngành 3 cung cấp 60 (đvt) cho ngành 2, Khi đó ngành 2 phải cung cấp cho chính nó là

- (A) 30. (B) 20. (C) 40. (D) 50.

☐ Câu 6. Cho hệ (I): $\begin{cases} x + y + 2z = 2m \\ mx - y + 4z = -3 \\ 2mx - 3y + 4z = m \end{cases}$. Hệ (I) có nghiệm duy nhất nếu và chỉ nếu

- (A) $m \neq -4.$ (B) $m \neq 2.$ (C) $m = 2.$ (D) $m \neq 4.$

☐ **Câu 7.** Cho hàm số $u(x, y)$ có các đạo hàm riêng cấp một liên tục trên $\mathbb{R}^2$. Giả sử ta có điều kiện

$$6x^2 + 5y^2 = 230 \quad (1)$$

Điều kiện cần để u đạt cực trị tại (x, y) thỏa điều kiện (1) là

- Ⓐ $6yu'_x = 5xu'_y$. Ⓑ $5xu'_x = 6yu'_y$.
 Ⓒ Các đáp án kia đều sai. Ⓓ $5yu'_x = 6xu'_y$.

☐ **Câu 8.** Cho A là ma trận vuông cấp 4 thỏa $(A^T)^3 A = 3I_4$. Định thức của $\left[\frac{1}{6}A^T\right]^{-1}$ có giá trị

- Ⓐ 432. Ⓑ ± 432 . Ⓒ -216. Ⓓ ± 216 .

☐ **Câu 9.** Hàm tổng chi phí khi sản xuất một sản phẩm cho bởi $C = \frac{3Q^2}{\sqrt{Q^2 + 5}} + 1000$, với Q là sản lượng. Tính chi phí biên khi $Q = 10$ (làm tròn kết quả đến 2 chữ số thập phân).

- Ⓐ 4, 32. Ⓑ 4, 75. Ⓒ 3, 07. Ⓓ 5, 12.

☐ **Câu 10.** Giả sử $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ là nghiệm của hệ phương trình

$$(*) \begin{cases} -x_1 - 2x_2 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 = -1 \end{cases}$$

Gọi A là ma trận hệ số của (*). Tính $A^{2025}x$.

- Ⓐ $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Ⓑ $\begin{bmatrix} 2025 \\ 2024 \end{bmatrix}$. Ⓒ $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Ⓓ $\begin{bmatrix} 2024 \\ 2025 \end{bmatrix}$.

2 Phần Tự Luận

☐ **Câu 1.** Cho phương trình vi phân

$$y'' + y = (x - 3)e^{2x} \quad (1)$$

a) Tìm nghiệm tổng quát $y = \phi(x, C_1, C_2)$ với $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ của (1).

b) Tìm nghiệm riêng $y = f(x)$ của (1) thỏa $f(0) = 2$ và $f'(0) = -1$.

☐ **Câu 2.** Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x + 3y + 2z = -1 \\ 2x + 4y + mz = 2 \\ x + my - z = 3 \end{cases}$. Tìm m để hệ phương trình có vô số nghiệm

và tìm nghiệm tổng quát trong trường hợp đó.

☐ **Câu 3.** Dùng phương pháp nhân tử Lagrange, tìm cực trị của $f(x, y) = x + 2y + 3$ thỏa điều kiện $x^{1/2}y^{1/2} = 4$.

ĐỀ THI TOÁN CAO CẤP K50

ĐỢT 2

1 Phần Trắc Nghiệm

□ **Câu 1.** Hàm cầu của một sản phẩm được cho bởi $Q = \sqrt{500 - 4P}$ (P là giá bán và Q là lượng cầu sản phẩm). Ta ký hiệu $\varepsilon(P)$ là hệ số co giãn của lượng cầu theo giá tại mức giá P . Gọi R_0 là doanh thu khi $|\varepsilon(P)| = 2$. Giá trị của R_0 là

- (A) 2100. (B) 1000. (C) 2125. (D) 500.

□ **Câu 2.** Chi phí C phụ thuộc vào sản lượng Q và thỏa mãn phương trình $C^2 - 2CQ + Q^2 - 2Q - 4800 = 0$. $Q = 50$ là

- (A) $\frac{9}{14}$. (B) $\frac{70}{63}$. (C) $\frac{71}{70}$. (D) $\frac{14}{11}$.

□ **Câu 3.** Xét phương trình ma trận: $AX = B$, trong đó $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ m & 4 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$, với m là tham số thực. Tìm giá trị của m để phương trình đã cho có nghiệm.

- (A) $m = 2$. (B) Không tồn tại m . (C) $m \neq 2$. (D) m tùy ý.

□ **Câu 4.** Cho A và B là các ma trận vuông cấp 4 với $\text{rank}(A) = 4$ và $\text{rank}(B) < 4$. Chọn kết luận đúng.

- (A) $\det(B^T \cdot A^3) \neq 0$.
(B) Ma trận $C = B^2 + 4B$ là khả nghịch.
(C) Ma trận $D = A^2B + AB^2$ có hạng $\text{rank}(D) < 4$.
(D) Phương trình $AX = B$ vô nghiệm.

□ **Câu 5.** Cho hệ phương trình tuyến tính (I):
$$\begin{cases} 3x + (2m - 1)y - 2z = -2 \\ 2x + (m - 1)y - z = 3 \\ -x - y - z = -m \end{cases} \quad \text{với } m \in \mathbb{R} \text{ là tham số.}$$
 Tìm m để hệ (I) vô nghiệm hoặc có vô số nghiệm.

- (A) $m = 3$. (B) $m = -1$. (C) Không tồn tại m . (D) $m = -3$.

□ **Câu 6.** Xét phương trình vi phân $y' + \frac{2y}{x} = \frac{e^x}{x^2}$ (1). Chọn phát biểu đúng.

- (A) Phương trình (1) có một nghiệm riêng thỏa điều kiện $y(1) = 2e$ là $y = (e^x - 2e)x^{-2}$.
(B) Mọi nghiệm $y(x)$ của phương trình (1) đều thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = 0$.
(C) Phương trình (1) có nghiệm tổng quát là $y = (2e^x + C)x^{-2}$.
(D) Mọi nghiệm $y(x)$ của phương trình (1) đều thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 0$.

☐ **Câu 7.** Cho hàm sản xuất $Q(L, K) = 8L^{0,3}K^{0,6}$ với L là lượng lao động và K là vốn. Khi K tăng 1,5% và L không đổi thì Q tăng xấp xỉ

- (A) 0,1%. (B) 0,9%. (C) 0,45%. (D) 1,55%.

☐ **Câu 8.** Xét hàm số $f(x, y) = x^2y(1 - x - y)$ và điểm $M(1, 0)$. Chọn kết luận đúng.

- (A) Hàm số f đạt cực đại tại M .
 (B) M không phải là điểm dừng của f .
 (C) Hàm số f đạt cực trị tại điểm M .
 (D) M là điểm dừng nhưng không phải là cực trị của f .

☐ **Câu 9.** Trong mô hình Input-Output của Leontief, cho ma trận hệ số đầu vào

$$A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,3 \\ 0,2 & 0,3 & m \\ 0,3 & 0,2 & 0,1 \end{pmatrix}$$

Biết rằng giá trị sản lượng của ngành 2 và ngành 3 lần lượt là 200 và 150 ; tổng giá trị nguyên liệu đầu vào của ngành 3 là 75 . Tính tổng giá trị nguyên liệu mà ngành 2 cung cấp cho ngành 3 và ngành 3 cung cấp cho ngành 2.

- (A) 50. (B) 60. (C) 50. (D) 65.

☐ **Câu 10.** Cho A là ma trận vuông cấp 3 thỏa mãn $A^2P_A = 16I_3$, trong đó P_A là ma trận phụ hợp của A . Định thức của ma trận $3A^T$ có giá trị là:

- (A) ± 216 . (B) 216. (C) ± 108 . (D) -108 .

2 Phần Tự Luận

☐ **Câu 1.** Cho hệ phương trình sau với $m \in \mathbb{R}$ là tham số:
$$\begin{cases} -x + y + 2z - t = 1 \\ -4x + 3y + 3z = m \\ -x + 2y + (m + 6)z - 5t = 3 \end{cases}$$

- a) Giải hệ trên với $m = 3$.
 b) Tìm m để hệ đã cho có nghiệm.

☐ **Câu 2.** Dùng phương pháp nhân tử Lagrange, tìm cực trị của hàm số $f(x, y) = x^{1/2}y^{1/2}$ với ràng buộc $x + 2y = 100$.

☐ **Câu 3.** Giải phương trình vi phân: $y'' - 2y' + y = (x + 1)e^{2x}$.

LỜI GIẢI TOÁN CAO CẤP K46

1 Phần Trắc Nghiệm

☐ Câu 1. Cho hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} x + y + 2z = 2m \\ mx - y + 4z = -3 \\ 2mx - 3y + 4z = m \end{cases}$$

Hệ (I) có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi

- (A) $m \neq 4$. (B) $m \neq -4$. (C) $m \neq -2$. (D) $m \neq 2$.

 **Lời giải.**

Hệ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $|A| \neq 0$. Mà ta có

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ m & -1 & 4 \\ 2m & -3 & 4 \end{vmatrix} = 2m + 8,$$

do đó $2m + 8 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -4$.

Chọn đáp án (B) 

☐ Câu 2. Trong mô hình Input-Output mở Leontief, cho ma trận hệ số đầu vào là

$$A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,3 & 0,3 \\ 0,2 & 0,2 & 0,2 \\ 0,3 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix}$$

Biết ngành 3 cung cấp 60 (đvt) cho ngành 1, khi đó ngành 1 phải cung cấp cho chính nó

- (A) 20. (B) 10. (C) 40. (D) 30.

 **Lời giải.**

Cứ 0,3 nguyên liệu đầu vào ngành 3 cung cấp cho ngành 1 thì ngành 1 sản xuất được 1 sản lượng đầu ra. Mà ngành 3 cung cấp 60 đơn vị đầu vào cho ngành 1 nên sản lượng đầu ra của ngành 1 là

$$60 : 0,3 \times 1 = 200$$

Tương tự, ngành 1 tự cung cho chính nó 0,1 thì sản xuất được 1 sản lượng đầu ra. Vậy ngành 1 phải tự cung cấp cho chính nó là

$$200 \times 0,1 = 20$$

Chọn đáp án (A) 

☐ **Câu 3.** Cho A là một ma trận vuông cấp 4. Ký hiệu P_A là ma trận phụ hợp của A . Biết rằng $|P_A| = 8$, thì

- (A) $|3A| = 6$. (B) $|3A| = 18$. (C) $|3A| = 54$. (D) $|3A| = 162$.

☘ **Lời giải.**

Ta có công thức ma trận nghịch đảo là:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} P_A$$

Lấy định thức hai vế, ta có

$$|A^{-1}| = \left| \frac{1}{|A|} P_A \right| \Rightarrow \frac{1}{|A|} = \left(\frac{1}{|A|} \right)^4 |P_A|$$

Mà $|P_A| = 8$ nên $|A|^3 = |P_A| = 8 \Rightarrow |A| = 2$. Vậy

$$|3A| = 3^4 |A| = 162$$

Chọn đáp án (D) ☑

☐ **Câu 4.** Cho $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & m & 3 \end{pmatrix}$. Đặt $B = (A - I)^2$. Khi đó, B suy biến khi và chỉ khi

- (A) $m = \pm 2$. (B) $m = -2$. (C) $m = 2$. (D) không tồn tại m .

☘ **Lời giải.**

Ta có B suy biến khi và chỉ khi $|B| = 0$ hay $|A - I| = 0$, mà

$$|A - I| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & m & 2 \end{vmatrix} = m - 2$$

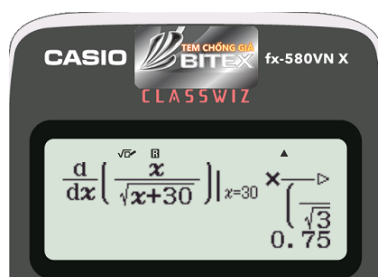
do đó $m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = 2$.

Chọn đáp án (C) ☑

☐ **Câu 5.** Cho $x > 0$ và $y = \frac{x}{\sqrt{x+30}}$. Hệ số co giãn của y đối với x tại $x = 30$ là

- (A) $\frac{4}{3}$. (B) $\frac{3}{4}$. (C) 3. (D) $\frac{1}{3}$.

☘ **Lời giải.**



Chọn đáp án (B) ☑

☐ **Câu 6.** Gọi P là giá bán và $C = C(Q)$ là hàm chi phí, với Q là mức sản lượng. Biết rằng $P \cdot Q = 500$ và chi phí biên tại $Q = 10$ là 10. Khi đó $\frac{dC}{dP}$ tại $Q = 10$ là

- (A) -2. (B) -4. (C) -12. (D) -24.

☘ **Lời giải.**

Theo đề bài ta có $Q = \frac{500}{P}$ do đó

$$\frac{dC}{dP} = \frac{dC}{dQ} \times \frac{dQ}{dP} = \frac{dC}{dQ} \times \frac{-500}{P^2}$$

Tại $Q = 10$ ta có $\frac{dC}{dQ} = 10$, $P = \frac{500}{10} = 50$. Vậy

$$\frac{dC}{dP} = 10 \times \frac{-500}{50^2} = -2$$

Chọn đáp án (A) ○

☐ **Câu 7.** Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân $y'' - 4y' - 5y = 7x \cos x$ có dạng

- (A) $u(x) = (mx + n) \cos x + (px + q) \sin x$ với m, n, p, q là các hằng số.
 (B) $u(x) = ae^{-x} + be^{5x} + (mx^2 + nx) \cos x + (px^2 + qx) \sin x$ với a, b, m, n, p, q là các hằng số.
 (C) $u(x) = ae^{-x} + be^{5x} + (mx^2 + nx) \cos x$ với a, b, m, n là các hằng số.
 (D) $u(x) = ae^{-x} + be^{5x} + (mx + n) \cos x + (px + q) \sin x$ với a, b, m, n, p, q là các hằng số.

☘ **Lời giải.**

Xét phương trình đặc trưng, ta có

$$k^2 - 4k - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} k = -1 \\ k = 5 \end{cases}$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình vi phân tuyến tính cấp hai thuần nhất là

$$ae^{-x} + be^{5x}$$

Do $\pm i$ không phải là nghiệm của phương trình đặc trưng nên nghiệm riêng có dạng là

$$(mx + n) \cos x + (px + q) \sin x$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là

$$u(x) = ae^{-x} + be^{5x} + (mx + n) \cos x + (px + q) \sin x$$

với a, b, m, n, p, q là các hằng số.

Chọn đáp án (D) ○

☐ **Câu 8.** Xét phương trình vi phân $y' - 2y = 2xe^{2x}$ (1). Phát biểu nào sau đây là sai?

- (A) Phương trình (1) có một nghiệm riêng $y = x^2 e^{2x}$.
 (B) Phương trình (1) có một nghiệm riêng $y = x^2 e^{2x} - 3e^{2x}$.
 (C) Mọi nghiệm $y(x)$ của phương trình (1) có tính chất $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 0$.
 (D) Mọi nghiệm $y(x)$ của phương trình (1) có tính chất $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = 0$.

❖ Lời giải.

Ta có:

$$\int -2 = -2x$$

Nhân hai về phương trình cho e^{-2x} , ta có

$$e^{-2x}y' - 2e^{-2x}y = 2x \Leftrightarrow (ye^{-2x})' = 2x \Leftrightarrow ye^{-2x} = x^2 + C \Leftrightarrow y = (x^2 + C)e^{2x}$$

Ta xét từng đáp án

- Xét (A) với $C = 0$ thì (A) đúng.
- Xét (B) với $C = -3$ thì (B) đúng.
- Xét (C) ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + C)e^{2x} = +\infty$ vậy (C) sai.
- Xét (D) ta có: $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + C)e^{2x} = 0$ vậy (D) đúng.

Chọn đáp án (C) ○

📖 Câu 9. Cho hàm $f(x, y) = -4x^2 - 4y^2 + 72 \ln(xy)$. Kết luận nào sau đây là đúng?

- (A) f không có cực trị.
- (B) f chỉ có cực đại.
- (C) f chỉ có cực tiểu.
- (D) f có cả cực đại và cực tiểu.

❖ Lời giải.

Điều kiện cần, ta tính các đạo hàm cấp 1

$$\begin{cases} f_x = -8x + \frac{72}{x} \\ f_y = -8y + \frac{72}{y} \end{cases}$$

Điều kiện đủ, ta tính các đạo hàm cấp 2

$$\begin{cases} f_{xx} = -8 - \frac{72}{x^2} < 0 \\ f_{yy} = -8 - \frac{72}{y^2} < 0 \\ f_{xy} = 0 \end{cases}$$

Vậy ta có $D_2 = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} = f_{xx} \times f_{yy} > 0$, hay hàm đạt cực trị mà do $D_1 = f_{xx} < 0$ nên hàm đạt cực đại.

Chọn đáp án (B) ○

📖 Câu 10. Cho g là hàm khả vi trên $\mathbb{R}$ và đặt $f(x, y) = -y + g(-x^2 + y^2)$ với $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Chọn kết quả đúng:

- (A) $y \cdot f'_x(x, y) + x \cdot f'_y(x, y) = -x$.
- (B) $y \cdot f'_x(x, y) + x \cdot f'_y(x, y) = -y$.
- (C) $y \cdot f'_x(x, y) + x \cdot f'_y(x, y) = x$.
- (D) $y \cdot f'_x(x, y) + x \cdot f'_y(x, y) = y$.

❖ Lời giải.

Ta tính các đạo hàm riêng

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = -2x \cdot g(-x^2 + y^2) \\ f'_y(x, y) = -1 + 2y \cdot g(-x^2 + y^2) \end{cases}$$

Vậy ta có

$$\begin{cases} y \cdot f'_x(x, y) = -2xy \cdot g(-x^2 + y^2) \\ x \cdot f'_y(x, y) = -x + 2xy \cdot g(-x^2 + y^2) \end{cases}$$

Cộng vế theo vế ta có:

$$y \cdot f'_x(x, y) + x \cdot f'_y(x, y) = -x$$

Chọn đáp án (A) 

2 Phần Tự Luận

📖 Câu 1. Cho hệ phương trình tuyến tính (I).

$$\begin{cases} x - y - z = 4 \\ x - my + z = -4m \\ -x + y + mz = -4m \end{cases} \quad (\text{với } m \text{ là tham số thực}).$$

Tìm m để hệ (I) có vô số nghiệm và tìm nghiệm tổng quát của hệ (I) trong trường hợp đó.

 **Lời giải.**

Ta thực hiện biến đổi sơ cấp

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 4 \\ 1 & -m & 1 & -4m \\ -1 & 1 & m & -4m \end{pmatrix} \xrightarrow[d_2 \rightarrow d_2 - d_1]{d_3 \rightarrow d_3 + d_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & -m + 1 & 2 & -4m - 4 \\ 0 & 0 & m - 1 & -4m + 4 \end{pmatrix}$$

Phương trình có vô số nghiệm khi $\text{Rank}(A) = \text{Rank}(\bar{A}) = k < n = 3 \Leftrightarrow m = 1$. Hệ phương trình khi này tương đương

$$\begin{cases} x - y - z = 4 \\ 2z = -8 \end{cases}$$

Chọn $y \in \mathbb{R}$ làm ẩn tự do, ta có

$$\begin{cases} x = 4 + y + z = y \\ z = -4 \end{cases}$$

Vậy nghiệm tổng quát của hệ phương trình là

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y \\ -4 \end{pmatrix}$$



📖 Câu 2. Cho hàm số

$$f(x, y) = 2x + 3y$$

Dùng phương pháp nhân tử Lagrange, hãy tìm cực trị của f với ràng buộc $2x^2 + y^2 = 44, \forall y > 0$.

🌀 **Lời giải.**

Lập hàm *Lagrange* ta có:

$$L(x, y, \lambda) = 2x + 3y + \lambda(44 - 2x^2 - y^2)$$

Điều kiện cần, ta tính các đạo hàm cấp 1

$$\begin{cases} L'_x = 2 - 4\lambda x = 0 \\ L'_y = 3 - 2\lambda y = 0 \\ L'_\lambda = 44 - 2x^2 - y^2 = 0 \end{cases}$$

Từ phương trình 1 và 2, kết hợp phương trình (3) ta có hệ

$$\begin{cases} y = 3x \\ 2x^2 + y^2 = 44 \end{cases}$$

do $y > 0$ nên ta có: $x = 2, y = 6, \lambda = \frac{1}{4}$. Tính các đạo hàm cấp hai tại điểm dừng, ta có:

$$g_1 = -4x = -8, \quad g_2 = -2y = -12, \quad L_{11} = -4\lambda = -1, \quad L_{22} = -2\lambda = -\frac{1}{2}, \quad L_{12} = L_{21} = 0.$$

thay vào định thức

$$|\overline{H}| = \begin{vmatrix} 0 & g_1 & g_2 \\ g_1 & L_{11} & L_{12} \\ g_2 & L_{21} & L_{22} \end{vmatrix}$$

ta có giá trị của định thức bằng

$$|\overline{H}| = 176 > 0.$$

Vậy tại $(2, 6)$ hàm f đạt cực đại địa phương. Giá trị của hàm f tại điểm này là

$$f(x, y) = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 6 = 22$$



📖 **Câu 3.** Cho phương trình vi phân

$$y'' - 5y' + 4y = 8x^2 - 4x + 4 \quad (1)$$

Tìm nghiệm $y(x)$ của phương trình (1) thỏa mãn điều kiện $y(0) = 6, y'(0) = -1$.

🌀 **Lời giải.**

Xét phương trình đặc trưng, ta có

$$k^2 - 5k + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ k = 4 \end{cases}$$

Vậy nghiệm tổng quát phương trình vi phân tuyến tính cấp hai thuần nhất là

$$Y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{4x}$$

Do 0 không phải là nghiệm của phương trình đặc trưng, nên nghiệm riêng có dạng là

$$u(x) = Ax^2 + Bx + C$$

Ta tính các đạo hàm cấp 1 và cấp 2 của nghiệm riêng

$$\begin{cases} u'(x) = 2Ax + B \\ u''(x) = 2A \end{cases}$$

Thay vào phương trình ban đầu ta có

$$\begin{aligned} u''(x) - 5u'(x) + 4u(x) &= 2A - 5(2Ax + B) + 4(Ax^2 + Bx + C) \\ &= 4Ax^2 + (4B - 10A)x + 4C - 5B + 2A \end{aligned}$$

So sánh với vế phải, đồng nhất hệ số ta có hệ sau:

$$\begin{cases} 4A = 8 \\ 4B - 10A = -4 \\ 4C - 5B + 2A = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B = 4 \\ C = 5 \end{cases}$$

Vậy nghiệm riêng có dạng là:

$$u(x) = 2x^2 + 4x + 5$$

Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân tuyến tính cấp hai không thuần nhất là

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{4x} + 2x^2 + 4x + 5$$

Do $y(0) = 2$ nên ta có

$$y(0) = C_1 + C_2 + 5 = 6 \Rightarrow C_1 + C_2 = 1$$

Đạo hàm cấp 1 của nghiệm tổng quát là

$$y'(x) = C_1 e^x + 4C_2 e^{4x} + 4x + 4$$

Tại $x = 0$ ta có $y'(0) = -1$ nên

$$-1 = y'(0) = C_1 + 4C_2 + 4 \Rightarrow C_1 + 4C_2 = -5$$

Giải hệ phương trình ta có $C_1 = 3$, $C_2 = -2$. Vậy nghiệm riêng thỏa mãn các điều kiện đề bài là

$$y(x) = 3e^x - 2e^{4x} + 2x^2 + 4x + 5$$



LỜI GIẢI TOÁN CAO CẤP K47

1 Phần Trắc Nghiệm

 **Câu 1.** Xét các ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Khi đó, $\det(AB - B^2)$ là

- (A) $-2m - 14$. (B) $-2m + 14$. (C) $2m - 14$. (D) Một kết quả khác.

 **Lời giải.**

Xét các ma trận A, B. Khi đó, $\det(AB - B^2)$ là:

$$\begin{aligned} \det(AB - B^2) &= \det((A - B) \cdot B) \\ &= \det(A - B) \cdot \det(B) \end{aligned}$$

○ Mà ta có định thức B bằng

$$\det(B) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -5$$

○ Tương tự ta cũng có định thức $A - B$ bằng

$$\det(A - B) = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ m - 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -2m - 14$$

Suy ra:

$$\det(AB - B^2) = (-14 - 2m) \times (-5) = 70 + 10m$$

Chọn đáp án (D) 

 **Câu 2.** Với x là ẩn số thực, xét ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x & -1 & -1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Tìm số nghiệm thực của phương trình $\det(A) = 0$.

- (A) Vô nghiệm. (B) Một nghiệm. (C) Hai nghiệm. (D) Vô số nghiệm.

☸ **Lời giải.**

Thực hiện biến đổi sơ cấp

$$\begin{pmatrix} 1 & x & -1 & -1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_2 \rightarrow d_2 - d_1} \begin{pmatrix} 1 & x & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{d_2 \leftrightarrow d_3} \begin{pmatrix} 1 & x & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{d_4 \rightarrow d_4 - 2d_2} \begin{pmatrix} 1 & x & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{d_4 \rightarrow d_4 + d_3} \begin{pmatrix} 1 & x & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Do trong lúc biến đổi sơ cấp ta có đổi 2 dòng nên khi này định thức là

$$|A| = -(1 \times 1 \times 2 \times 2) = -4$$

Vậy phương trình vô nghiệm.

Chọn đáp án (A) ⓐ

☐ **Câu 3.** Cho A, B, C là các ma trận vuông cấp 3 và

$$\det(A) = 2, \quad \det(B) = 4, \quad \det(C) = -4.$$

Đặt ma trận $D = A^2 \cdot B^{-1} \cdot C^T$. Khi đó $\det(2D^{-1})$ bằng

- (A) -2 . (B) -0.25 . (C) -4 . (D) Một kết quả khác.

☸ **Lời giải.**

Ta có định thức D bằng

$$\begin{aligned} \det(D) &= \det(A^2 \cdot B^{-1} \cdot C^T) \\ &= \det(A^2) \cdot \det(B^{-1}) \cdot \det(C^T) \\ &= (\det A)^2 \cdot \frac{1}{\det B} \cdot \det C \\ &= (2)^2 \cdot \frac{1}{4} \cdot (-4) \\ &= -4 \end{aligned}$$

Nên từ đây ta có:

$$\begin{aligned}\det(2D^{-1}) &= 2^3 \cdot \det(D^{-1}) \\ &= 8 \cdot \frac{1}{\det D} \\ &= 8 \cdot \frac{1}{-4} \\ &= -2\end{aligned}$$

Chọn đáp án (A) 

📌 Câu 4. Cho A là ma trận vuông cấp 4 khả nghịch thỏa mãn

$$A + 2A^T = 6I$$

với I là ma trận đơn vị cùng cấp với A . Chọn phát biểu sai.

- (A) $\det(A) = 2$. (B) $A = A^T$. (C) $A^2 = 4I$. (D) $2A^{-1} = I$.

🌀 Lời giải.

Lấy chuyển vị phương trình ban đầu ta có hệ phương trình ma trận:

$$\begin{cases} A + 2A^T = 6I \\ A^T + 2A = 6I \end{cases}$$

Từ phương trình (1) và (2), giải hệ ta được $A = A^T = 2I$. Ta xét các đáp án

- Xét (A) ta có $|A| = |2I| = 2^4$ suy ra (A) sai.
- Xét (B) ta có $A = A^T = 2I$ suy ra (B) đúng.
- Xét (C) ta có $A = 2I \Rightarrow A^2 = 4I^2 = 4I$ suy ra (C) đúng.
- Xét (D) ta có $2I = A \Rightarrow 2A^{-1} = A \cdot A^{-1} = I$ suy ra (D) đúng.

Chọn đáp án (A) 

📌 Câu 5. Cho ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & m \end{pmatrix}.$$

Khi A khả nghịch, ta viết

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Chọn kết quả sai.

- (A) $a_{32} = 1$. (B) $a_{22} = 1$. (C) $a_{23} = -1$. (D) $\det(A) = 4 - 3m$.

🌀 Lời giải.

Theo đề bài và công thức nghịch đảo ta có:

$$\frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix}^T$$

Ta xét từng đáp án:

○ Xét (D), ta có

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & m \end{vmatrix} = -3m + 4$$

Suy ra (D) đúng.

○ Xét (A), ta có

$$a_{32} = C_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$$

Suy ra (A) sai.

○ Xét (B), ta có

$$a_{22} = C_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & m \end{vmatrix} = 1$$

Suy ra (B) đúng.

○ Xét (C), ta có

$$a_{23} = C_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1$$

Suy ra (C) đúng.

Chọn đáp án (A) **○**

☐ **Câu 6.** Cho A là ma trận vuông cấp 4. Ký hiệu P_A là ma trận phụ hợp của A . Cho biết

$$\det(-P_A) = 64$$

Khi đó $\det(2A)$ bằng

- (A) 64. (B) -64. (C) 32. (D) Một kết quả khác.

☘ **Lời giải.**

Từ đề bài ta có:

$$\det(-P_A) = (-1)^4 \det(P_A) = \det(P_A) \Rightarrow \det(P_A) = 64$$

Ta có công thức ma trận nghịch đảo

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} P_A \Rightarrow |A| A^{-1} = P_A$$

Lấy định thức hai vế ta có

$$||A| A^{-1}| = |P_A| \Rightarrow |A|^4 \frac{1}{|A|} = |P_A|$$

Mà $|P_A| = 64$ nên $|A|^3 = 64 \Leftrightarrow |A| = 4$. Khi đó $\det(2A)$ bằng

$$\det(2A) = 2^4 \det(A) = 16 \cdot 4 = 64$$

Chọn đáp án (A) **○**

☐ **Câu 7.** Xét ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 2 & m & -1 \\ -1 & m+1 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tìm m để hạng của A bằng 3.

Ⓐ Không tồn tại $m \in \mathbb{R}$.

Ⓑ $m = -1$.

Ⓒ $m = -2$.

Ⓓ $\forall m \in \mathbb{R}$.

🌀 **Lời giải.**

Để hạng của A bằng 3. Điều này tương đương với $\det(A) \neq 0$. Ta tính định thức của A :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & m & -1 \\ -1 & m+1 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Vì $\det(A) = 0$ với mọi m , nên $\text{Rank}(A)$ luôn nhỏ hơn 3. Do đó không tồn tại m để $\text{Rank}(A) = 3$.

Chọn đáp án Ⓐ ○

☐ **Câu 8.** Tìm m để hệ phương trình tuyến tính sau đây có vô số nghiệm:

$$\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ 4x + my + 2z = 2 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$$

Ⓐ $m = 2$.

Ⓑ $m = -2$.

Ⓒ $m = \pm 1$.

Ⓓ Không tồn tại $m \in \mathbb{R}$.

🌀 **Lời giải.**

Thực hiện biến đổi sơ cấp

$$\begin{pmatrix} m & 1 & 1 & 1 \\ 4 & m & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_3 \leftrightarrow d_1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & m & 2 & 2 \\ m & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{d_1 \leftrightarrow d_1:2} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 4 & m & 2 & 2 \\ m & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{d_2 \rightarrow d_2 - 4d_1} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & m+2 & 0 & 2 \\ m & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

○ Với $m = 0$ lấy $d_3 \rightarrow d_3 - \frac{1}{2}d_2$ ta có

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

vậy phương trình có nghiệm duy nhất.

○ Với $m \neq 0$ lấy $d_3 \rightarrow d_3 - md_1$ ta có

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & m+2 & 0 & 2 \\ 0 & 1+\frac{1}{2}m & 1-\frac{1}{2}m & 1 \end{pmatrix}$$

○ Với $m = -2$ ta có

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_2 \leftrightarrow d_3} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Hay $R(A) = 2$, $R(\bar{A}) = 3$ suy ra phương trình vô nghiệm.

○ Với $m \neq -2$, lấy $d_3 \rightarrow d_3 - \frac{1}{2}d_2$ ta có

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & m+2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1-\frac{1}{2}m & 0 \end{pmatrix}$$

○ Với $m = 2$ suy ra $R(A) = R(\bar{A}) = 2 < 3$ hay phương trình có vô số nghiệm.

○ Với $m \neq 2$ suy ra $R(A) = R(\bar{A}) = 3$ hay phương trình có nghiệm duy nhất.

Lời giải khác. Ta tính định thức của ma trận A

$$|A| = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 4 & m & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = m^2 - 4$$

Ta có $|A| = 0$ thì phương trình có vô số nghiệm hoặc vô nghiệm. Bấm *Mode* 9 thử lại với từng m

○ Với $m = -2$ thì phương trình vô nghiệm.

○ Với $m = 2$ thì phương trình có vô số nghiệm.

Chọn đáp án (A) **ⓐ**

📌 **Câu 9.** Cho các hệ phương trình tuyến tính

$$(I) : A \cdot X = B \text{ (có } n \text{ ẩn số)} \text{ và } (II) : A \cdot X = 0$$

với A là ma trận vuông cấp n thỏa mãn $A^2 = 0$. Chọn kết luận sai.

(A) Hệ (I) có nghiệm duy nhất.

(B) Hệ (II) có vô số nghiệm.

(C) $(A^T)^2 = 0$.

(D) $A + I$ là ma trận khả nghịch, với I là ma trận đơn vị cùng cấp với A .

🌀 **Lời giải.**

Do $A^2 = 0$ nên $|A| = 0$. Ta xét từng đáp án

- Xét (A) ta có do $|A| = 0$ nên hệ phương trình có vô số nghiệm hoặc vô nghiệm suy ra (A) sai.
- Xét (B) ta có phương trình $A \cdot X = 0$ luôn có nghiệm mà $|A| = 0$ nên hệ phương trình có vô số nghiệm hoặc vô nghiệm suy ra $A \cdot X = 0$ có vô số nghiệm hay (B) đúng.
- Do $(A^n)^T = (A^T)^n$ suy ra $(A^T)^2 = (A^2)^T$ mà vì $A^2 = 0$ nên $(A^2)^T = 0$ vậy (C) đúng.
- Từ đề bài ta có

$$I = I^2 = I^2 - A^2 = (I - A)(I + A)$$

Theo định nghĩa suy ra $I + A$ là ma trận nghịch đảo suy ra (D) đúng.

Chọn đáp án (D) ○

☐ **Câu 10.** Trong mô hình Input-Output mở Leontief, xét ma trận hệ số đầu vào

$$A = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.1 & 0.3 \\ 0.3 & 0.2 & 0.2 \\ m & 0.3 & 0.2 \end{pmatrix}$$

Cho biết sản lượng của ngành 1 là 200 và yêu cầu cuối của ngành 1 là 60. Tìm lượng nguyên liệu của ngành 3 cung cấp cho ngành 1.

- (A) 30. (B) 45. (C) 60. (D) 75.

☘ Lời giải.

Đề sai thiếu dữ kiện.

☐ **Câu 11.** Tính đạo hàm của hàm $y = f(x) = x^{x+1}$.

- (A) $x^x(\ln x + 1 + x)$. (B) $x^x(\ln x + 1)$. (C) $x^x(\ln x + x)$. (D) Một kết quả khác.

☘ Lời giải.

Lấy ln hai vế ta có

$$\ln(f(x)) = \ln(x^{x+1}) = (x+1) \ln x$$

Lấy đạo hàm ta có

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln x + \frac{x+1}{x}$$

Do $f(x) = x^{x+1}$ nên ta có

$$f'(x) = x^{x+1} \ln x + x^x(x+1)$$

Chọn đáp án (D) ○

☐ **Câu 12.** Cho hàm số $y = 8\sqrt{x+8}$. Tìm biên tế của y theo x khi hệ số co giãn của y theo x bằng 0, 25.

- (A) 1.00. (B) 1.25. (C) 1.50. (D) Một kết quả khác.

☘ Lời giải.

Ta có công thức hệ số co giãn

$$\varepsilon = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y} = \frac{8}{2\sqrt{x+8}} \cdot \frac{x}{8\sqrt{x+8}} = \frac{x}{2(x+8)}$$

Mà hệ số co giãn bằng 0,25 nên

$$\frac{x}{2(x+8)} = 0,25 \Leftrightarrow x = 8$$

Mặt khác ta cũng có

$$\frac{dy}{dx} = \varepsilon \cdot \frac{y}{x} = 0,25 \cdot \frac{8\sqrt{8+8}}{8} = 1$$

Chọn đáp án (A) **○**

☐ **Câu 13.** Gọi P, Q lần lượt là giá bán và mức sản lượng, $C(Q)$ là hàm chi phí. Cho biết $P \cdot Q = 250$ và $\frac{dC}{dP}$ tại $Q = 25$ là -0.5 . Hãy tính chi phí biên theo sản lượng Q khi $Q = 25$.

- (A) 0.2. (B) 0.3. (C) 0.4. (D) Một kết quả khác.

☘ **Lời giải.**

Ta có công thức đạo hàm như sau

$$\frac{dC}{dQ} = \frac{dC}{dP} \cdot \frac{dP}{dQ}$$

Vì $P \cdot Q = 250$ nên $P = \frac{250}{Q}$, ta tính $\frac{dP}{dQ}$ tại $Q = 25$

$$\frac{dP}{dQ} = -\frac{250}{Q^2} = -\frac{250}{25^2} = -\frac{2}{5}$$

vậy từ đây ta có

$$\frac{dC}{dQ} = -0.5 \times \left(-\frac{2}{5}\right) = 0,2$$

Chọn đáp án (A) **○**

☐ **Câu 14.** Xét hàm hai biến

$$f(x, y) = \ln(2xy) - 2xy + 2y^2 - 6y + 1$$

Gọi H là ma trận Hess của hàm $f(x, y)$. Tìm y thỏa mãn $\det(H) = -4$.

- (A) $y = \pm 0, 5$. (B) $y = \pm 1$.
(C) $y = \pm 2$. (D) Các câu kia đều sai.

☘ **Lời giải.**

Ta tính các đạo hàm cấp 1

$$\begin{cases} f_x = \frac{2y}{2xy} - 2y = \frac{1}{x} - 2y \\ f_y = \frac{2x}{2xy} - 2x + 4y - 6 = \frac{1}{y} - 2x + 4y - 6 \end{cases}$$

Ta tính đạo hàm cấp 2

$$\begin{cases} f_{xx} = -\frac{1}{x^2} \\ f_{yy} = -\frac{1}{y^2} + 4 \\ f_{xy} = -2 \end{cases}$$

Ma trận Hessian H có dạng:

$$H = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{x^2} & -2 \\ -2 & -\frac{1}{y^2} + 4 \end{pmatrix}$$

Mà $\det(H) = -4$ suy ra

$$-\frac{1}{x^2} \left(-\frac{1}{y^2} + 4 \right) - 4 = -4 \Rightarrow -\frac{1}{x^2} \left(-\frac{1}{y^2} + 4 \right) = 0$$

hay $y = \pm 0, 5$.

Chọn đáp án (A) 

📌 Câu 15. Xét hàm hai biến

$$f(x, y) = x^3 + y^4 - 3mx - 4y \text{ (với } m > 0\text{)}$$

Chọn phát biểu sai.

- | | |
|---------------------------------------|--------------------------------|
| (A) Hàm $f(x, y)$ có cực đại. | (B) Hàm $f(x, y)$ có cực tiểu. |
| (C) Hàm $f(x, y)$ chỉ có một cực trị. | (D) Hàm f có hai điểm dừng. |

🌀 Lời giải.

Ta tính các đạo hàm cấp 1

$$\begin{cases} f_x = 3x^2 - 3m = 0 \\ f_y = 4y^3 - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = m \\ y^3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{m} \\ y = 1 \end{cases}$$

Vậy hàm số có hai điểm dừng là $M_1(\sqrt{m}, 1)$ và $M_2(-\sqrt{m}, 1)$. Ta tính các đạo hàm cấp 2

$$f_{xx} = 6x, \quad f_{yy} = 12y^2, \quad f_{xy} = 0$$

Vậy ta có định thức

$$|H| = \begin{vmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{vmatrix} = 72xy^2$$

- Xét tại $M_1(\sqrt{m}, 1)$ ta có $H_1 = 6\sqrt{m} > 0$ và $\det(H) = 72\sqrt{m} > 0$ suy ra hàm số đạt cực tiểu tại M_1 .
- Xét tại $M_2(-\sqrt{m}, 1)$ ta có $H_1 = -6\sqrt{m} < 0$ và $\det(H) = -72\sqrt{m} < 0$. Điểm M_2 không phải là điểm cực trị.

Chọn đáp án (A) 

☐ **Câu 16.** Cho hàm sản lượng Q của một xí nghiệp là

$$Q(L, K) = 2L + 3\sqrt{LK}$$

Với L là lượng lao động và K là lượng vốn. Tại thời điểm $L = 25$, $K = 100$, xí nghiệp giảm lượng lao động 1 đơn vị. Để sản lượng tăng thêm 1 đơn vị, xí nghiệp cần tăng lượng vốn xấp xỉ là kết quả nào sau đây ?

- (A) 12. (B) 18. (C) 20. (D) Một kết quả khác.

☘ **Lời giải.**

Sử dụng vi phân toàn phần: $\Delta Q \approx \frac{\partial Q}{\partial L} \Delta L + \frac{\partial Q}{\partial K} \Delta K$. Ta tính các đạo hàm riêng

$$\frac{\partial Q}{\partial L} = 2 + \frac{3\sqrt{K}}{2\sqrt{L}}, \quad \frac{\partial Q}{\partial K} = \frac{3\sqrt{L}}{2\sqrt{K}}$$

Tại $(25, 100)$, ta có:

$$\frac{\partial Q}{\partial L} = 2 + \frac{3\sqrt{100}}{2\sqrt{25}} = 5, \quad \frac{\partial Q}{\partial K} = \frac{3\sqrt{25}}{2\sqrt{100}} = \frac{15}{20} = 0,75$$

Với $\Delta L = -1$ và $\Delta Q = 1$:

$$1 \approx (5)(-1) + (0,75)\Delta K \Rightarrow 6 \approx 0,75\Delta K \Rightarrow \Delta K \approx 8$$

Vậy cần tăng vốn xấp xỉ 8 đơn vị.

Chọn đáp án (D) **(D)**

☐ **Câu 17.** Xét hàm phụ Lagrange

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda [16 - g(x, y)]$$

trong đó

$$f(x, y) = 3x^2 - 5xy, \quad g(x, y) = 2x - 2y$$

Cho biết $M(10, 2, k)$ là điểm dừng của hàm L . Ký hiệu H_b là ma trận Hess biên tại điểm M . Chọn kết quả đúng.

- (A) $k = 25$. (B) $k = 50$. (C) $|H_b| = 4$. (D) $|H_b| = -4$.

☘ **Lời giải.**

Điều kiện cần, tính các đạo hàm cấp 1

$$\begin{cases} L'_x = 6x - 5y - 2\lambda = 0 \\ L'_y = -5x + 2\lambda = 0 \\ L'_\lambda = 16 - 2x + 2y = 0 \end{cases}$$

Từ phương trình 1, 2 ta có:

$$2\lambda = 6x - 5y = 5x$$

Kết hợp phương trình thứ 3 ta có hệ

$$\begin{cases} 6x - 5y = 5x \\ 16 - 2x + 2y = 0 \end{cases}$$

Giải hệ ta có $x = 10$, $y = 2$ và suy ra $k = \lambda = 25$. Ta tính các ma trận cấp 2

$$g_x = 2, g_y = -2, L_{xx} = 6, L_{yy} = 0, L_{xy} = -5$$

Vậy Định thức ma trận Hess bằng

$$|H_b| = \begin{vmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & L_{xx} & L_{xy} \\ g_y & L_{yx} & L_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 6 & -5 \\ -2 & -5 & 0 \end{vmatrix}$$

Suy ra $|H_b| = 16$.

Chọn đáp án (A) 

📌 Câu 18. Xét phương trình vi phân

$$y' - 3y = -6 \quad (*)$$

và gọi $Y(x)$ là nghiệm tổng quát của phương trình (*). Chọn phát biểu sai.

- (A) $\lim_{x \rightarrow +\infty} Y(x) = 2$.
- (B) $\lim_{x \rightarrow -\infty} Y(x) = 2$.
- (C) Hàm $Y(x) = 2 - e^{3x}$ là một nghiệm của phương trình (*).
- (D) Phương trình (*) có một nghiệm riêng là hàm hằng.

🌀 Lời giải.

Ta có:

$$\int -3 = -3x$$

Nhân hai vế phương trình cho e^{-3x} ta có

$$e^{-3x}y' - 3e^{-3x}y = -6e^{-3x} \Leftrightarrow (e^{-3x}y)' = -6e^{-3x} \Leftrightarrow e^{-3x}y = 2e^{-3x} + C \Leftrightarrow y = 2 + Ce^{3x}$$

Ta xét từng đáp án

- Xét (A) ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} Y(x) = \pm\infty$ suy ra (A) sai.
- Xét (B) ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} Y(x) = 0$ suy ra (B) đúng.
- Xét (C) lấy $C = -1$ suy ra (C) đúng.
- Xét (D) lấy $C = 0$ suy ra (D) đúng.

Chọn đáp án (C) 

📌 Câu 19. Xét phương trình vi phân

$$y'' - 6y' + 5y = 2y' - 11y \quad (*)$$

Nghiem tổng quát của (*) là

- (A) $y(x) = C_1e^{4x} + xC_2e^{4x} \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$.
- (B) $y(x) = C_1e^{-x} + C_2e^{5x} \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$.
- (C) $y(x) = C_1e^{-4x} + C_2xe^{-4x} \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$.
- (D) $y(x) = C_1e^x + C_2e^{-5x} \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$.

🌀 Lời giải.

Rút gọn phương trình ta có:

$$y'' - 8y' + 16y = 0$$

Xét phương trình đặc trưng:

$$k^2 - 8k + 16 = 0 \Leftrightarrow (k - 4)^2 = 0 \Leftrightarrow k = 4$$

Vậy nghiệm tổng quát là:

$$y(x) = (C_1 + C_2x)e^{4x}$$

Chọn đáp án (A) 

☐ **Câu 20.** Xét phương trình vi phân

$$y'' + x^2 = y \quad (*)$$

Nghiệm tổng quát của phương trình (*) là

(A) $f(x) = C_1e^x + C_2e^{-x} + x^2 + 2 \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R}).$

(B) $f(x) = C_1e^x + C_2e^{-x} - x^2 + 2 \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R}).$

(C) $f(x) = C_1e^{-x} + C_2e^x + x^2 - 2 \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R}).$

(D) $f(x) = C_1e^{-x} + C_2e^x - x^2 - 2 \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R}).$

 **Lời giải.**

Ta viết lại phương trình

$$y'' - y = -x^2$$

Xét phương trình đặc trưng

$$k^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow k = \pm 1$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình vi phân tuyến tính cấp hai thuần nhất là

$$Y(x) = C_1e^x + C_2e^{-x}$$

Do 0 không phải là nghiệm của phương trình đặc trưng nên nghiệm riêng có dạng là

$$u(x) = Ax^2 + Bx + C$$

Ta tính các đạo hàm cấp 1, 2 của nghiệm riêng

$$u(x)' = 2Ax + B, \quad u(x)'' = 2A$$

Thay vào phương trình ban đầu ta có:

$$u'' - u = 2A - Ax^2 + Bx + C$$

Đồng nhất hệ số ta có: $A = 1, B = 0, C = 2$. Vậy nghiệm riêng là

$$u(x) = x^2 + 2$$

Nghiệm tổng quát:

$$y(x) = Y(x) + u(x) = C_1e^x + C_2e^{-x} + x^2 + 2$$

Chọn đáp án (A) 

LỜI GIẢI TOÁN CAO CẤP K49

MÃ ĐỀ 1

1 Phần Trắc Nghiệm

 **Câu 1.** Cho $y = y(x)$ là hàm ẩn xác định bởi phương trình $4x^2 + xy^3 - 5x + 3y + 4ye^x - 7 = 0$. Đạo hàm của y tại $x = 0$ có giá trị là

- (A) 0. (B) 1. (C) $-\frac{5}{7}$. (D) $\frac{4}{7}$.

 **Lời giải.**

Thay $x = 0$ vào phương trình ban đầu ta có

$$7y(0) - 7 \Leftrightarrow y(0) = 1$$

Đạo hàm phương trình theo x ta có

$$8x + y^3 + 3xy^2y' - 5 + 3y' + 4y'e^x + 4ye^x = 0$$

Tại $x = 0$ ta có

$$y(0)^3 - 5 + 3y'(0) + 4y'(0) + 4y(0) = 0 \Leftrightarrow y'(0) = \frac{-y(0)^3 - 4y(0) + 5}{7}$$

Do $y(0) = 1$ nên

$$y'(0) = \frac{-1 - 4 + 5}{7} = 0$$

Chọn đáp án (A) 

 **Câu 2.** Cho A, B, C là các ma trận vuông cấp 3. Giả sử $|A| = -2$, $|B| = 3$, $|C| = -4$. Định thức của ma trận $2A^3B^TC^{-1}$ có giá trị là

- (A) -48. (B) 48. (C) 16. (D) 3.

 **Lời giải.**

Ta có

$$|2A^3B^TC^{-1}| = 2^3 \times |A|^3 \times |B| \times \frac{1}{|C|}$$

Thay các giá trị trên ta có

$$|2A^3B^TC^{-1}| = 2^3 \times (-2)^3 \times 3 \times \frac{1}{-4} = -48$$

Chọn đáp án (A) 

☐ **Câu 3.** Cho hàm số $z = f(x, y) = 4x^2 + y^2 - 4mx - 2my + 2m^2 + 2m - 1$ (m là tham số). Tìm m để giá trị nhỏ nhất của f , trên toàn bộ mặt phẳng, lớn hơn hay bằng 5.

- Ⓐ Không tồn tại m . Ⓑ $m \geq 2$. Ⓒ $m \geq 3$. Ⓓ $m = 1$.

☘ **Lời giải.**

Điều kiện cần, ta tính các đạo hàm cấp 1

$$\begin{cases} f_x = 8x - 4m = 0 \\ f_y = -2y - 2m = 0 \end{cases}$$

Vậy điểm dừng $M\left(\frac{m}{2}, m\right)$. Điều kiện đủ, ta tính các đạo hàm cấp 2

$$\begin{cases} f_{xx} = 8 \\ f_{yy} = 2 \\ f_{xy} = 0 \end{cases}$$

Vậy ta có $D_2 = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} = 16 > 0$, hay hàm đạt cực trị mà do $D_1 = f_{xx} = 8 > 0$ nên hàm đạt cực tiểu. Giá trị nhỏ nhất của hàm f khi này là

$$z = 4\left(\frac{m}{2}\right)^2 + m^2 - 4m\left(\frac{m}{2}\right) - 2m^2 + 2m - 1 = 2m - 1$$

Do giá trị nhỏ nhất của f lớn hơn hay bằng 5 nên $2m - 1 \geq 5 \Leftrightarrow m \geq 3$.

Chọn đáp án Ⓒ Ⓞ

☐ **Câu 4.** Xét phương trình vi phân $y' - 3y = 2xe^{3x}$. Phát biểu nào sau đây là đúng?

- Ⓐ Nghiệm tổng quát của phương trình là $y = (3x^2 + C)e^{3x}$.
 Ⓑ Nghiệm riêng thỏa điều kiện $y(0) = 2$ của phương trình là $y = (x^2 - 3)e^{3x}$.
 Ⓒ Nghiệm riêng thỏa điều kiện $y(0) = 1$ của phương trình là $y = (-3x^2 + 1)e^{3x}$.
 Ⓓ Nghiệm riêng thỏa điều kiện $y(1) = 2e^3$ của phương trình là $y = (x^2 + 1)e^{3x}$.

☘ **Lời giải.**

Ta có:

$$\int -3 = -3x$$

Nhân hai vế phương trình cho e^{-3x} , ta có

$$e^{-3x}y' - 3e^{-3x}y = 2x \Leftrightarrow (ye^{-3x})' = 2x \Leftrightarrow ye^{-3x} = x^2 + C \Leftrightarrow y = (x^2 + C)e^{3x}$$

Ta xét từng đáp án

- Xét Ⓐ ta có nghiệm tổng quát của phương trình là $y = (x^2 + C)e^{3x}$ nên Ⓐ sai.
- Xét Ⓑ ta có $y(0) = 2$ thì $C = 2$ hay $y = (x^2 + 2)e^{3x}$ nên Ⓑ sai.
- Xét Ⓒ ta có $y(0) = 1$ thì $C = 1$ hay $y = (x^2 + 1)e^{3x}$ nên Ⓒ sai.
- Xét Ⓓ ta có $y(1) = 2e^3$ thì $C = 1$ hay $y = (x^2 + 1)e^{3x}$ nên Ⓓ đúng.

Chọn đáp án (D) 

☐ **Câu 5.** Cho A là ma trận vuông cấp 3, không suy biến. Giả sử B là ma trận phù hợp của A và $|B| = 16$. Phát biểu nào sau đây là đúng ?

- (A) $BA = -4$. (B) $AB = I_3$. (C) $BA = \pm \frac{1}{4}I_3$. (D) $AB = \pm 4I_3$.

 **Lời giải.**

Ta có công thức ma trận nghịch đảo là

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}P_A \Leftrightarrow |A|A^{-1} = B$$

Lấy định thức hai vế ta có

$$||A|A^{-1}| = |B| = 16$$

Mà $||A|A^{-1}| = |A|^3 \frac{1}{|A|} = |A|^2$ nên $|A| = \pm 4$. Ta có

$$|A|A^{-1} = B \Leftrightarrow AB = |A|I = \pm 4I$$

Chọn đáp án (D) 

☐ **Câu 6.** Xét mô hình input-output gồm ba ngành kinh tế với ma trận hệ số đầu vào là

$$A = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,4 & m \\ 0,3 & 0,2 & 0,1 \\ 0,2 & 0,1 & 0,3 \end{bmatrix}$$

- Giá trị sản lượng của 3 ngành lần lượt là 210, 200, 180.
- Tổng giá trị nguyên liệu đầu vào của ngành 3 là 108.

Tính tổng giá trị nguyên liệu mà ngành 1 cung cấp cho cả ba ngành.

- (A) 142. (B) 154. (C) 164. (D) 137.

 **Lời giải.**

Tổng giá trị nguyên liệu đầu vào của ngành 3 là 108 nên

$$180(m + 0,4) = 108 \Leftrightarrow m = 0,2$$

Tổng giá trị nguyên liệu mà ngành 1 cung cấp cho cả ba ngành là

$$0,1 \cdot 210 + 0,4 \cdot 200 + 0,2 \cdot 180 = 137$$

Chọn đáp án (D) 

☐ **Câu 7.** Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ m & 3 & 3 \end{bmatrix}$. Khi đó $(A - I_3)^2$ suy biến khi và chỉ khi

- (A) $m = 10$. (B) $m = -15$. (C) $m = 11$. (D) $m = -11$.

 **Lời giải.**

Ma trận $(A - I_3)^2$ suy biến khi và chỉ khi $|(A - I_3)^2| = 0 \Leftrightarrow |A - I_3| = 0$, mà ta có

$$|A - I_3| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ m & 3 & 2 \end{vmatrix} = -m + 11$$

do đó $m = 11$.

Chọn đáp án (C) ⓐ

☐ **Câu 8.** Một nhà máy sản xuất một mặt hàng, sử dụng nguyên liệu thô là thép. Hàm doanh thu được xác định bởi $R = 36x^{2/3}y^{1/3}$, trong đó x là số giờ lao động và y là số tấn thép được sử dụng. Khi $x = 8$ và $y = 125$, phát biểu nào sau đây là đúng ?

- (A) Nếu lượng thép giảm 6% và số giờ lao động không đổi thì doanh thu giảm xấp xỉ 4%.
- (B) Nếu giảm 1 tấn thép và số giờ lao động không đổi thì doanh thu giảm xấp xỉ 5 đơn vị.
- (C) Nếu tăng thêm 1 giờ lao động và lượng thép không đổi thì doanh thu tăng xấp xỉ 80 đơn vị.
- (D) Nếu giờ lao động tăng 6% và lượng thép không đổi thì doanh thu tăng xấp xỉ 4%.

☘ **Lời giải.**

Mẹo: cái nào không đạo hàm coi như là số để bên trái, cái nào đạo hàm là ẩn để bên phải. Ta xét đáp án

○ Xét (A), (B) ta có

– Xét (B), ta có $R = 144y^{1/3}$ vậy $\frac{dR}{dy} = 1,92$ vậy (B) sai

– Xét (A), ta có

$$\varepsilon = \frac{dR}{dy} \frac{y}{R} = 1,92 \cdot \frac{125}{144 \cdot 125^{1/3}} = \frac{1}{3}$$

vậy cứ y giảm 1% thì R giảm $\frac{1}{3}\%$ mà y giảm 6% nên R giảm 2% nên (A) sai

○ Xét (C), (D) ta có

– Xét (C), ta có $R = 180x^{2/3}$ vậy $\frac{dR}{dx} = 60$ vậy (C) sai

– Xét (D), ta có

$$\varepsilon = \frac{dR}{dx} \frac{x}{R} = 60 \cdot \frac{8}{180 \cdot 8^{2/3}} = \frac{2}{3}$$

vậy cứ x tăng 1% thì R tăng $\frac{2}{3}\%$ mà x tăng 6% nên R tăng 4% nên (D) đúng

Chọn đáp án (D) ⓐ

☐ **Câu 9.** Cho A là ma trận vuông cấp n , khả nghịch. Giả sử B là ma trận nhận được từ A bằng cách

thay dòng 1 bằng cách lấy -2 nhân với dòng 1 rồi cộng với 3 lần dòng 2.

Phát biểu nào sau đây là sai ?

- (A) Hệ $AX = 0$ có vô số nghiệm $\Rightarrow$ hệ $BX = 0$ có vô số nghiệm.
- (B) $\det(A^T) = \det(B)$.
- (C) $\text{rank}(-2A) = \text{rank}(B)$.
- (D) $\text{rank}(A) = \text{rank}(-2B)$.

❖ **Lời giải.**

Thay dòng 1 bằng cách lấy -2 nhân với dòng 1 rồi cộng với 3 lần dòng 2 nên

$$|B| = -2|A|$$

Mà do $|A|$ khả nghịch nên $|A| \neq 0$ hay $|B| \neq 0$. Ta xét từng đáp án

- Xét (A), do định thức $|A| \neq 0$ nên hệ không thể vô số nghiệm, vậy nên phải sửa đề bằng cách bỏ khả nghịch ở câu dẫn mà hãy thêm vào từng đáp án giả sử A khả nghịch. Ta làm trường hợp này công nhận như câu này là câu riêng, vì $Ax = 0$ có vô số nghiệm nên $|A| = 0$ hay $|B| = 0$ mà do $BX = 0$ luôn có nghiệm nên $BX = 0$ có vô số nghiệm nên (A) đúng.
- Xét (B), ta có: $\det(B) = -2\det(A) = -2\det(A^T)$ nên (B) sai.
- Xét (C), (D) các phép biến đổi không ảnh hưởng tới hạng chỉ ảnh hưởng tới định thức (Mẹo: tìm thì không thay đổi, tính thì sẽ thay đổi) vậy 2 đáp án đúng. Cách khác: sai định thức để suy ra hạng cũng được.

Chọn đáp án (B) **Ⓚ**

📖 **Câu 10.** Giả sử hàm chi phí sản xuất của một xí nghiệp là $C = C(Q)$, với Q là sản lượng, có đạo hàm tại mọi $Q > 0$. Biết rằng chi phí trung bình $\bar{C} = \frac{C(Q)}{Q}$ đạt giá trị nhỏ nhất là 20000 khi $Q = Q_0 = 400$. Xác định chi phí biên tại Q_0 .

- | | |
|------------|------------------------------------|
| (A) 20000. | (B) 25000. |
| (C) 50. | (D) Chưa đủ điều kiện để xác định. |

❖ **Lời giải.**

Ta tính đạo hàm

$$\bar{C}' = \frac{C(Q)'Q - C(Q)}{Q^2} = 0$$

Tại $Q = Q_0 = 400$ thì chi phí trung bình $\bar{C} = \frac{C(Q)}{Q}$ đạt giá trị nhỏ nhất nên

$$C(Q)'Q - C(Q) = 0$$

tại $Q = Q_0 = 400$, hay

$$C(Q_0)' = \frac{C(Q_0)}{Q_0}$$

Mà do $\frac{C(Q_0)}{Q_0} = 20000$ nên $C(Q)' = 20000$.

Chọn đáp án (A) **Ⓚ**

2 Phần Tự Luận

☐ Câu 1. Giải và biện luận hệ phương trình sau theo tham số m

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ 2x + my + mz = 3 \\ 3x + (m+1)y + 5z = 4 \end{cases}$$

🌸 Lời giải.

Thực hiện biến đổi sơ cấp:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & m & m & 3 \\ 3 & m+1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_3 \rightarrow d_3 - 3d_1]{d_2 \rightarrow d_2 - 2d_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & m-2 & m-4 & 1 \\ 0 & m-2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

○ Xét $m-2=0 \Leftrightarrow m=2$ ta có

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Lấy $d_3 \rightarrow d_3 - \frac{1}{2}d_2$ suy ra $R(A) = 2$, $R(\overline{A}) = 3$ hay phương trình vô nghiệm.

○ Xét $m-2 \neq 0$ lấy $d_3 \rightarrow d_3 - d_2$ ta có

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & m-2 & m-4 & 1 \\ 0 & 0 & 3-m & 0 \end{pmatrix}$$

○ Xét $m \neq 3$ suy ra $R(A) = R(\overline{A}) = 3$, hay hệ có nghiệm duy nhất. khi này hệ phương trình tương đương

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ (m-2)y + (m-4)z = 1 \\ (3-m)z = 0 \end{cases}$$

Vậy ta có

$$\begin{cases} x = 1 - y - 2z = 1 - \frac{1}{m-2} \\ y = \frac{1}{m-2} \\ z = 0 \end{cases}$$

○ Xét $m=3$ suy ra $R(A) = R(\overline{A}) = 2 < 3$, hay hệ có vô số nghiệm. khi này hệ phương trình tương đương

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ y - z = 1 \end{cases}$$

Chọn $z \in \mathbb{R}$ làm ẩn tự do, ta có:

$$\begin{cases} x = 1 - y - 2z = -3z \\ y = 1 + z \end{cases}$$

Vậy nghiệm tổng quát của hệ phương trình là:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3z \\ 1+z \\ z \end{pmatrix}$$



📌 **Câu 2.** Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân $y'' + 3y' - 4y = e^{-4x}$.

🌀 **Lời giải.**

Xét phương trình đặc trưng, ta có

$$k^2 + 3k - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ k = -4 \end{cases}$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình vi phân tuyến tính cấp hai thuần nhất là

$$Y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-4x}$$

Do -4 là nghiệm của phương trình đặc trưng, nên nghiệm riêng có dạng

$$u(x) = Cx e^{-4x}$$

Ta tính các đạo hàm cấp 1 và cấp 2 của nghiệm riêng

$$\begin{cases} u'(x) = C e^{-4x} - 4Cx e^{-4x} = C e^{-4x}(1 - 4x) \\ u''(x) = -4C e^{-4x}(1 - 4x) - 4C e^{-4x} = -4C e^{-4x}(2 - 4x) \end{cases}$$

Thay vào phương trình ban đầu ta có

$$\begin{aligned} u'' + 3u' - 4u &= -4C e^{-4x}(2 - 4x) + 3C e^{-4x}(1 - 4x) - 4Cx e^{-4x} \\ &= -5C e^{-4x} \end{aligned}$$

So sánh với vế phải e^{-4x} , đồng nhất hệ số ta có: $C = -\frac{1}{5}$. Vậy nghiệm riêng là

$$u(x) = -\frac{1}{5}x e^{-4x}.$$

Nghiem tổng quát của phương trình vi phân đã cho là

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-4x} - \frac{1}{5}x e^{-4x}.$$



📌 **Câu 3.** Một nhà máy sản xuất một loại hàng hóa với một loại nguyên liệu đầu vào A . Nếu l là số giờ lao động và k là số đơn vị nguyên liệu A được sử dụng thì sản lượng ước tính là

$$Q(l, k) = 20l + 25k - l^2 - 3k^2$$

Chi phí cho mỗi giờ lao động là 2 và chi phí cho mỗi đơn vị nguyên liệu A là 4. Nếu sử dụng hết lượng ngân sách là 50 đơn vị tiền để sản xuất, hãy xác định l và k để sản lượng thu được là lớn nhất.

☼ **Lời giải.**

Ta có hàm điều kiện sẽ là

$$2l + 4k = 50$$

Lập hàm *Lagrange* ta có:

$$L(l, k, \lambda) = 20l + 25k - l^2 - 3k^2 + \lambda(50 - 2l - 4k)$$

Điều kiện cần, ta tính các đạo hàm cấp 1

$$\begin{cases} L'_l = 20 - 2l - 2\lambda = 0 \\ L'_k = 25 - 6k - 4\lambda = 0 \\ L'_\lambda = 50 - 2l - 4k = 0 \end{cases}$$

Từ phương trình 1 và 2, kết hợp phương trình (3) ta có hệ

$$\begin{cases} 4l - 6k = 15 \\ 2l + 4k = 50 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta có: $l = \frac{90}{7}$, $k = \frac{85}{14}$, $\lambda = -\frac{20}{7}$. Ta có:

$$g_1 = -2, \quad g_2 = -4, \quad L_{11} = -2, \quad L_{22} = -6, \quad L_{12} = 0$$

Nên ta có định thức bằng

$$|\overline{H}| = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -4 \\ -2 & -2 & 0 \\ -4 & 0 & -6 \end{vmatrix}$$

ta có giá trị của định thức bằng

$$|\overline{H}| = 56 > 0.$$

Vậy tại $\left(\frac{90}{7}, \frac{85}{14}\right)$ hàm Q đạt cực đại toàn cục. Giá trị của hàm Q tại điểm này là

$$Q = \frac{3725}{28}$$



LỜI GIẢI TOÁN CAO CẤP K49

MÃ ĐỀ 2

1 Phần Trắc Nghiệm

□ **Câu 1.** Xét ma trận $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ m & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix}$ với $m \in \mathbb{R}$. Khi đó, ma trận $A^2 - A$ suy biến khi và chỉ khi

Ⓐ $m = -3/4$.

Ⓑ $m = -4/3$.

Ⓒ Với mọi $m \in \mathbb{R}$.

Ⓓ $m = -4/3 \vee m = 0$.

✿ **Lời giải.**

Ma trận $A^2 - A$ suy biến khi và chỉ khi $|A^2 - A| = 0 \Leftrightarrow |A||A - I| = 0$. Mà ta có:

○ Ta tính định thức của A

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ m & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -4 \end{vmatrix} = 6m + 8$$

○ Ta tính định thức của $A - I$

$$|A - I| = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -2 \\ m & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -5 \end{vmatrix} = 7m$$

Vậy $6m + 8 = 0$, $7m = 0$ hay $m = -\frac{4}{3}$ hoặc $m = 0$

Chọn đáp án Ⓓ

□ **Câu 2.** Cho A là một ma trận vuông cấp $n \geq 2$. Ký hiệu P_A là ma trận phù hợp của ma trận A . Cho biết $\det(P_A) = -27$ và $\det(2A) = -48$. Hãy chọn kết quả đúng.

Ⓐ $|A| = -6$.

Ⓑ $|A| = -12$.

Ⓒ $n = 4$.

Ⓓ $n = 3$.

✿ **Lời giải.**

Từ đề bài ta có

$$|2A| = -48$$

$$\Leftrightarrow 2^n |A| = -48$$

$$\Leftrightarrow 2^{n-4} (-|A|) = 3$$

Ta có công thức ma trận nghịch đảo

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} P_A \Leftrightarrow |A| \cdot A^{-1} = P_A$$

Lấy định thức 2 vế ta có

$$\begin{aligned} | |A| A^{-1} | &= |P_A| \\ \Leftrightarrow |A|^n \frac{1}{|A|} &= -27 \\ \Leftrightarrow (-|A|)^{n-1} &= 27 \end{aligned}$$

Vậy từ đây kết hợp với $2^{n-4}|A| = -3$, ta suy ra

$$(-|A|)^{n-1} = 2^{3(n-4)} (-|A|)^3 \Leftrightarrow (-|A|)^{n-4} = 2^{3(n-4)}$$

Lấy $\log_2$ 2 vế ta có

$$\begin{aligned} (n-4) \log_2 (-|A|) &= 3(n-4) \\ \Leftrightarrow (n-4) (\log_2 (-|A|) - 3) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} n &= 4 \\ |A| &= -8 \end{cases} \end{aligned}$$

Với $|A| = -8 \Rightarrow n = 1 + \log_2 3$ nên không thỏa mãn hay $n = 4$.

Chọn đáp án (C) 

📌 **Câu 3.** Cho A, B, C là các ma trận vuông cấp 4 thỏa mãn

$$|A| = -3, \quad |B| = 2, \quad |C| = 4.$$

Đặt ma trận $M = 2A^2 \cdot B^T \cdot C^{-1}$. Chọn kết quả đúng.

- (A) $|M| = 144.$ (B) $|M| = 72.$ (C) $|M| = 36.$ (D) $|M| = 9.$

 **Lời giải.**

Ta có

$$|2A^2 B^T C^{-1}| = 2^4 \times |A|^2 \times |B| \times \frac{1}{|C|}$$

Thay các giá trị trên ta có

$$|2A^2 B^T C^{-1}| = 2^4 \times (-3)^2 \times 2 \times \frac{1}{4} = 72$$

Chọn đáp án (B) 

📌 **Câu 4.** Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ m & -1 & 1 \end{pmatrix}$ với $m \in \mathbb{R}$. Khi A khả nghịch, ta đặt $A^{-1} = (b_{ij})_{3 \times 3}$.

Hãy chọn phát biểu đúng.

- (A) $b_{23} = 1.$ (B) $b_{32} = -1.$ (C) $b_{22} = m.$ (D) $\det(A) = m.$

 **Lời giải.**

Theo đề bài và công thức nghịch đảo ta có:

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix}^T$$

Ta xét từng đáp án:

○ Xét (D), ta có

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ m & -1 & 1 \end{vmatrix} = -m$$

○ Xét (A), ta có

$$b_{23} = \frac{1}{|A|} C_{32} = \frac{(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{-m} = -\frac{1}{m}$$

○ Xét (B), ta có

$$b_{32} = \frac{1}{|A|} C_{23} = \frac{(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ m & -1 \end{vmatrix}}{-m} = -\frac{1}{m}$$

○ Xét (C), ta có

$$b_{22} = \frac{1}{|A|} C_{22} = \frac{(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ m & 1 \end{vmatrix}}{-m} = \frac{m-1}{m}$$

Vậy cả 4 đáp án đều sai, có vẻ tác giả ghi đề bài thiếu phải sửa thành $A^{-1} = \frac{1}{|A|} (b_{ij})_{3 \times 3}$.

📌 **Câu 5.** Xét mô hình Input – Output mở Leontief có ba ngành với ma trận hệ số đầu vào

$$A = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.3 & 0.2 \\ 0.6 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.3 & 0.3 \end{pmatrix}$$

Gọi x_1, x_2, x_3 lần lượt là giá trị sản lượng của ba ngành. Nhờ cải tiến kĩ thuật nên ngành 1 tiết kiệm được $\frac{1}{3}$ nguyên liệu của ngành 2. Khi nhu cầu cuối cùng của ngành mở đối với 3 ngành lần lượt là 75, 90, 81. Hãy chọn kết quả đúng.

(A) $x_1 + x_2 + x_3 = 810$.

(B) $x_1 = 270$.

(C) $x_2 = 260$.

(D) $x_3 = 250$.

🌀 **Lời giải.**

Do cải tiến kĩ thuật nên ngành 1 tiết kiệm được $\frac{1}{3}$ nguyên liệu của ngành 2 suy ra a_{21} lúc này thành

$$a_{21} = \frac{2}{3} \times 0,6 = 0,4$$

Vậy ma trận hệ số đầu vào khi này là

$$A = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.3 & 0.2 \\ 0.4 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.3 & 0.3 \end{pmatrix}$$

Vì nhu cầu cuối cùng của ngành mở đối với 3 ngành lần lượt là 75, 90, 81 nên ta có phương trình

$$(I - A)X = D \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0.9 & -0.3 & -0.2 \\ -0.4 & 0.8 & -0.1 \\ -0.2 & -0.3 & 0.7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 75 \\ 90 \\ 81 \end{pmatrix}$$

Hay ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 0,9x_1 - 0,3x_2 - 0,2x_3 = 75 \\ -0,4x_1 + 0,8x_2 - 0,1x_3 = 90 \\ -0,2x_1 - 0,3x_2 + 0,7x_3 = 81 \end{cases}$$

Bấm hệ ta có $x_1 = 240$, $x_2 = 270$, $x_3 = 300$.

Chọn đáp án (A) 

📖 **Câu 6.** Cho ma trận A vuông cấp 3 có hạng là $R(A) \leq 2$. Hãy chọn phát biểu sai.

- (A) Ma trận $A^2 - 2A$ suy biến.
- (B) Ma trận $A^3 + 3A$ khả nghịch.
- (C) $\det(A^T \cdot A^5) = 0$.
- (D) Hệ phương trình tuyến tính $AX = 0$ có vô số nghiệm.

🌸 **Lời giải.**

Do $R(A) \leq 2$ nên $|A| = 0$. Ta xét từng đáp án

- Xét (A) ta có $|A^2 - 2A| = |A||A - 2I| = 0$ vậy ma trận suy biến nên (A) đúng.
- Xét (B) ta có $|A^3 + 3A| = |A||A^2 + 3I| = 0$ vậy ma trận không khả nghịch nên (B) sai.
- Xét (C) ta có $|A^T \cdot A^5| = |A||A|^5 = |A|^6 = 0$ nên (C) đúng.
- Xét (D) ta có $|A| = 0$ thì hệ phương trình có vô số nghiệm hoặc vô nghiệm mà phương trình $AX = 0$ luôn có nghiệm nên $AX = 0$ có vô số nghiệm suy ra (D) đúng.

Chọn đáp án (C) 

📖 **Câu 7.** Hàm chi phí là $C(q)$ với q là mức sản lượng. Ký hiệu $\bar{C}(q) = \frac{C(q)}{q}$ là hàm chi phí trung bình theo q . Biết rằng khi $q = 10$ thì hệ số co giãn của chi phí theo q là 1 và chi phí trung bình là 40. Hãy tính chi phí biên theo q khi $q = 10$.

- (A) 80.
- (B) 60.
- (C) 40.
- (D) 20.

🌸 **Lời giải.**

Ta có hệ số co giãn của chi phí theo q là

$$\varepsilon = \frac{dC}{dq} \times \frac{q}{C} \Leftrightarrow \frac{dC}{dq} = \varepsilon \times \frac{C}{q}$$

Mà tại $q = 10$ thì $\varepsilon = 1$, $\frac{C(q)}{q} = 40$ nên

$$\frac{dC}{dq} = 1 \times 40 = 40$$

Chọn đáp án (A) 

📌 **Câu 8.** Xét hàm lợi nhuận $\pi(L, K) = 3L^{1/3}K^{1/3} - L - 0.04K$. Ma trận Hess của hàm lợi nhuận là

$$H = \begin{pmatrix} \pi''_{LL} & \pi''_{LK} \\ \pi''_{KL} & \pi''_{KK} \end{pmatrix}$$

Biết rằng hàm lợi nhuận $\pi(L, K)$ đạt giá trị lớn nhất tại $(L, K) = (L_0, K_0)$. Hãy chọn phát biểu đúng.

(A) $\pi''_{LL}(L, K) = \frac{2}{3}L^{-5/3}K^{1/3}$.

(B) $\det(H) = \frac{5}{9}L^{-4/3}K^{-4/3}$.

(C) $L_0 + K_0 = 600$.

(D) $L_0 \times K_0 = 25^3$.

🌸 **Lời giải.**

Điều kiện cần, ta tính các đạo hàm cấp 1

$$\begin{cases} \pi_L = K^{1/3}L^{-2/3} - 1 = 0 \\ \pi_K = L^{1/3}K^{-2/3} - 0,04 = 0 \end{cases}$$

Vậy ta có phương trình

$$\frac{1}{0,04} = \frac{K^{1/3}L^{-2/3}}{L^{1/3}K^{-2/3}} = KL^{-1} \Rightarrow K = 25L$$

Thay lại vào phương trình thứ nhất ta có $L_0 = 25$ hay $K_0 = 25^2$. Vậy đáp (C) sai và đáp (D) đúng. Điều kiện đủ, ta tính các đạo hàm cấp 2

$$\begin{cases} \pi_{LL} = -\frac{2}{3}K^{1/3}L^{-5/3} \\ \pi_{KK} = -\frac{2}{3}L^{1/3}K^{-5/3} \\ \pi_{LK} = \frac{1}{3}K^{-2/3}L^{-2/3} \end{cases}$$

Thay vào H ta có

$$\begin{aligned} H &= \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}K^{1/3}L^{-5/3} & \frac{1}{3}K^{-2/3}L^{-2/3} \\ \frac{1}{3}K^{-2/3}L^{-2/3} & -\frac{2}{3}L^{1/3}K^{-5/3} \end{pmatrix} \\ &= \frac{3}{9}K^{-4/3}L^{-4/3} \end{aligned}$$

Vậy đáp (A) sai và đáp (B) sai.

Chọn đáp án (D) 

☐ **Câu 9.** Một xí nghiệp có hàm năng suất $Q(x, y) = 7x^{1/2}y^{1/3}$ với x, y lần lượt là lượng nguyên liệu thứ nhất, thứ hai. Ký hiệu $\varepsilon_x Q(x_0, y_0), \varepsilon_y Q(x_0, y_0)$ lần lượt là hệ số co giãn của Q theo x , theo y tại điểm (x_0, y_0) . Hãy chọn kết quả đúng.

- (A) $\varepsilon_x Q(27, 4) = \frac{7}{2}$. (B) $\varepsilon_y Q(27, 4) = \frac{1}{3}$. (C) $\varepsilon_x Q(9, 8) = \frac{1}{3}$. (D) $\varepsilon_y Q(9, 8) = \frac{1}{2}$.

Ta có hệ số co giãn

✿ **Lời giải.**

Hệ số co giãn của Q theo x là

$$\varepsilon_x Q = \frac{dQ}{dx} \cdot \frac{x}{Q} = \frac{7}{2} x^{-1/2} y^{1/3} \cdot \frac{x}{7x^{1/2} y^{1/3}} = \frac{1}{2}$$

Hệ số co giãn của Q theo y là

$$\varepsilon_y Q = \frac{dQ}{dy} \cdot \frac{y}{Q} = \frac{7}{3} x^{1/2} y^{-2/3} \cdot \frac{y}{7x^{1/2} y^{1/3}} = \frac{1}{3}$$

Chọn đáp án (B) ○

☐ **Câu 10.** Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân $y' + \frac{y}{x} = \frac{\cos x}{x}$ là

- (A) $y = \frac{C}{x} - \frac{\sin x}{x}$, với $C \in \mathbb{R}$. (B) $y = Cx - x \cdot \sin x$, với $C \in \mathbb{R}$.
 (C) $y = \frac{C}{x} + \frac{\sin x}{x}$, với $C \in \mathbb{R}$. (D) $y = Cx + x \cdot \cos x$, với $C \in \mathbb{R}$.

✿ **Lời giải.**

Ta có:

$$\int \frac{1}{x} = \ln x$$

Nhân hai vế phương trình cho $e^{\ln x} = x$, ta có

$$xy' + y = \cos x \Leftrightarrow (xy)' = \cos x \Leftrightarrow xy = \sin x + C \Leftrightarrow y = \frac{\sin x + C}{x}$$

Chọn đáp án (C) ○

2 Phần Tự Luận

📌 Câu 1. Xét hệ phương trình tuyến tính:

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = -1 \\ 2x + 3y + mz = 0 \\ x + my - z = 1 \end{cases} \quad (1), \text{ với } m \in \mathbb{R}.$$

- Tìm m để hệ (1) có nghiệm duy nhất.
- Tìm m để hệ (1) có vô số nghiệm. Hãy tìm nghiệm tổng quát trong trường hợp này.

🌀 Lời giải.

Thực hiện biến đổi sơ cấp:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & m & 0 \\ 1 & m & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_2 \rightarrow d_2 - 2d_1]{d_3 \rightarrow d_3 - d_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & m-4 & 2 \\ 0 & m-2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{d_2 \rightarrow -d_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4-m & -2 \\ 0 & m-2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

- Xét $m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = 2$ ta có $R(A) = R(\bar{A}) = 3$ hay hệ phương trình có nghiệm duy nhất.
- Xét $m - 2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2$, lấy $d_3 \rightarrow d_3 - (m - 2)d_2$ ta có:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4-m & -2 \\ 0 & 0 & (m-1)(m-5) & 2(m-1) \end{pmatrix}$$

- Xét $m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$ ta có $R(A) = R(\bar{A}) = 2 < 3$ hay hệ phương trình có vô số nghiệm.
- Xét $m - 5 = 0 \Leftrightarrow m = 5$ ta có $2 = R(A) \neq R(\bar{A}) = 3$ hay hệ phương trình vô nghiệm.
- Xét $m \neq 5$ và $m \neq 1$ ta có $R(A) = R(\bar{A}) = 3$ hay hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

- Vậy với $m \neq 5$ và $m \neq 1$ thì hệ (1) có nghiệm duy nhất.
- vậy với $m = 1$ thì hệ có vô số nghiệm, hệ phương trình lúc này tương đương

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = -1 \\ y + 3z = -2 \end{cases}$$

Chọn $z \in \mathbb{R}$ làm ẩn tự do, ta có:

$$\begin{cases} x = -1 - 2y - 2z = 3 + 4z \\ y = -2 - 3z \end{cases}$$

Vậy nghiệm tổng quát của hệ phương trình là

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 + 4z \\ -2 - 3z \\ z \end{pmatrix}$$

☐ **Câu 2.** Xét phương trình vi phân $y'' + y = x^2 - 3$ (*)

- Tìm nghiệm tổng quát của phương trình (*).
- Tìm nghiệm $y(x)$ của phương trình (*) thỏa $y(0) = 2, y'(0) = -1$.

🌀 **Lời giải.**

- Xét phương trình đặc trưng, ta có

$$k^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow k = \pm i$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình vi phân tuyến tính cấp hai thuần nhất là

$$Y(x) = C_1 \sin x + C_2 \cos x$$

Do 0 không phải là nghiệm của phương trình đặc trưng, nên nghiệm riêng có dạng

$$u(x) = Ax^2 + Bx + C$$

Ta tính các đạo hàm cấp 1 và cấp 2 của nghiệm riêng

$$\begin{cases} u'(x) = 2Ax + B \\ u''(x) = 2A \end{cases}$$

Thay vào phương trình ban đầu ta có

$$\begin{aligned} u'' + u &= 2A + Ax^2 + Bx + C \\ &= Ax^2 + Bx + 2A + C \end{aligned}$$

So sánh với vế phải $x^2 - 3$, đồng nhất hệ số ta có:

$$\begin{cases} A = 1 \\ B = 0 \\ 2A + C = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 0 \\ C = -5 \end{cases}$$

Vậy nghiệm riêng là

$$u(x) = x^2 - 5$$

Nghiem tổng quát của phương trình vi phân đã cho là

$$y(x) = Y(x) + u(x) = C_1 \sin x + C_2 \cos x + x^2 - 5.$$

- Do $y(0) = 2$ nên ta có:

$$y(0) = C_2 - 5 = 2 \Rightarrow C_2 = 7$$

Đạo hàm cấp 1 của nghiệm tổng quát là

$$y'(x) = C_1 \cos x - C_2 \sin x + 2x$$

Tại $x = 0$ ta có $y'(0) = -1$ nên

$$-1 = y'(0) = C_1$$

Vậy nghiệm riêng thỏa mãn điều kiện đề bài là

$$y(x) = -\sin x + 7 \cos x + x^2 - 5.$$



 **Câu 3.** Dùng phương pháp nhân tử Lagrange, hãy tìm cực trị của hàm $f(x, y) = 2x + y + 1$ thoả mãn điều kiện $x^{1/2}y^{1/2} = 4$.

 **Lời giải.**

Lập hàm *Lagrange* ta có:

$$L(x, y, \lambda) = 2x + y + 1 + \lambda(4 - x^{1/2}y^{1/2})$$

Điều kiện cần, ta tính các đạo hàm cấp 1

$$\begin{cases} L'_x = 2 - \frac{1}{2}\lambda y^{1/2}x^{-1/2} = 0 \\ L'_y = 1 - \frac{1}{2}\lambda x^{1/2}y^{-1/2} = 0 \\ L'_\lambda = 4 - x^{1/2}y^{1/2} = 0 \end{cases}$$

Lấy phương trình (1) chia phương trình (2) ta có:

$$2 = \frac{\frac{1}{2}\lambda y^{1/2}x^{-1/2}}{\frac{1}{2}\lambda x^{1/2}y^{-1/2}} = \frac{y}{x}$$

Kết hợp với phương trình thứ 3 ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} y = 2x \\ \sqrt{xy} = 4 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta có: $x = 2\sqrt{2}$, $y = 4\sqrt{2}$, $\lambda = 2\sqrt{2}$. Tính đạo hàm cấp hai tại điểm dừng ta có:

$$g_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad g_2 = -\frac{\sqrt{2}}{4}, \quad L_{11} = \frac{\sqrt{2}}{4}, \quad L_{22} = \frac{\sqrt{2}}{16}, \quad L_{12} = -\frac{\sqrt{2}}{8}$$

Nên ta có định thức bằng

$$|\overline{H}| = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{8} \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{8} & \frac{\sqrt{2}}{16} \end{vmatrix}$$

ta có giá trị của định thức bằng

$$|\overline{H}| = -\frac{\sqrt{2}}{8} < 0.$$

Vậy tại $(2\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$ hàm f đạt cực tiểu địa phương. Giá trị của hàm $Q = f$ tại điểm này là

$$Q = 4\sqrt{2} + 4\sqrt{2} + 1 = 8\sqrt{2} + 1$$



LỜI GIẢI TOÁN CAO CẤP K50 ĐỢT 1

1 Phần Trắc Nghiệm

☐ **Câu 1.** Hàm tổng chi phí khi sản xuất một sản phẩm cho bởi $c = \frac{5q^2}{\sqrt{q^2 + 3}} + 5000$, với q là sản lượng. Tính chi phí biên khi $q = 10$ (làm tròn kết quả đến 2 chữ số thập phân).

Ⓐ 4, 12.

Ⓑ 5, 07.

Ⓒ 5, 84.

Ⓓ 4, 93.

🌀 **Lời giải.**



Chọn đáp án Ⓑ Ⓞ

☐ **Câu 2.** Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} -4 & -3 & x \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ với x là một số thực và P_A là ma trận phụ hợp của A .

Giả sử $P_A = A$. Chọn phát biểu đúng.

Ⓐ $|A| = 1$.

Ⓑ $|A| = -7$.

Ⓒ $|A| = 25$.

Ⓓ $|A| = 33$.

🌀 **Lời giải.**

Ta có:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} P_A = \frac{1}{|A|} A$$

Suy ra $|A|^{-1} = |A|^{-3} |A| = |A|^{-2}$, hay $|A|^{-1} = |A| = 1$.

Chọn đáp án Ⓐ Ⓞ

☐ **Câu 3.** Cho các ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ m & 5 & 6 \end{pmatrix}$ và $B = A^2 - A$. Tìm các giá trị của m để B khả nghịch.

Ⓐ $m \neq 0$.

Ⓑ $m \neq 4$.

Ⓒ m tùy ý.

Ⓓ $m \neq 0$ và $m \neq 4$.

❖ **Lời giải.**

B khả nghịch khi $|B| \neq 0$, mà ta có:

$$|B| = |A(A - I)| = |A| \cdot |A - I|$$

vậy $|A| \neq 0$ và $|A - I| \neq 0$, ta thực hiện biến đổi

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ m & 5 & 6 \end{vmatrix} = m - 4, \quad |A - I| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ m & 5 & 5 \end{vmatrix} = 2m$$

Vậy $m \neq 0$ và $m \neq 4$.

Chọn đáp án (D) **○**

📖 **Câu 4.** Giả sử giá trị lớn nhất của hàm số $z = f(x, y) = -x^2 - xy - y^2 + 3x + my - 2m$ (m là tham số) bằng z_M và đạt được tại điểm $(1, 1)$. Chọn phát biểu đúng.

- (A) $z_M = 3$. (B) $z_M = -3$. (C) $z_M = -4$. (D) $z_M = 4$.

❖ **Lời giải.**

Ta có:

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = -2x - y + 3 = 0 \\ f'_y(x, y) = -x - 2y + m = 0 \end{cases}$$

do điểm dừng là $(1, 1)$ nên $m = 3$. Thay lại vào đề bài ta có $z_m = -3$.

Chọn đáp án (B) **○**

📖 **Câu 5.** Chi tiêu C của một thành phố phụ thuộc vào thu nhập I của thành phố đó. Mỗi liên hệ được xác định bởi phương trình $C^2 + \frac{1}{4}I^2 = IC + \frac{3}{2}I$. Biết rằng phần chi tiêu lớn hơn 50% thu nhập. Tính giá trị chi tiêu biên (biên tế của hàm chi tiêu) khi $I = 24$.

- (A) $MC = \frac{3}{4}$. (B) $MC = \frac{1}{4}$. (C) $MC = \frac{3}{8}$. (D) $MC = \frac{5}{8}$.

❖ **Lời giải.**

Ta có: $C = C(I)$, đạo hàm hai vế phương trình theo I ta có

$$2C'C + \frac{1}{2}I = C + IC' + \frac{3}{2} \Leftrightarrow C' = \frac{C - \frac{1}{2}I + \frac{3}{2}}{2C - I}$$

Mặt khác thay $I = 24$ vào phương trình ta có

$$C^2 - 24C + 108 = 0 \Leftrightarrow (C - 18)(C - 6) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} C = 18 \\ C = 6 \end{cases}$$

Vậy $C = 18$ do $C > \frac{I}{2}$, thay $C = 18, I = 24$ vào lại C' . Ta có $C' = \frac{5}{8}$.

Chọn đáp án (D) **○**

📖 **Câu 6.** Cho hệ phương trình tuyến tính $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + 5y + 8z = 4 \\ x + 3y + mz = 4 \end{cases}$ với $m \in \mathbb{R}$ là một tham số. Phát

biểu nào sau đây là sai ?

- (A) Hệ có nghiệm với mọi m . (B) Không có m để hệ có vô số nghiệm.
(C) Tồn tại m để hệ có nghiệm. (D) Tồn tại m để hệ có nghiệm duy nhất.

🌀 **Lời giải.**

Thực hiện biến đổi sơ cấp

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 8 & 4 \\ 1 & 3 & m & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_2 \rightarrow d_2 - 2d_1]{d_3 \rightarrow d_3 - d_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & m-3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_3 \rightarrow d_3 - d_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & m-5 & 1 \end{pmatrix}$$

- Hệ có nghiệm khi $\text{Rank}(A) = \text{Rank}(\bar{A})$ mà $\text{Rank}(\bar{A}) = 3$, với mọi m . Vậy chỉ xảy ra khi $\text{Rank}(A) = 3 \Leftrightarrow m \neq 5$. (nghiệm ở đây cũng là nghiệm duy nhất)
- Hệ có vô số nghiệm khi $\text{Rank}(A) = \text{Rank}(\bar{A}) = k < 3$ điều này không xảy ra do $\text{Rank}(\bar{A}) = 3$, với mọi m .

Chọn đáp án (A) ○

📖 **Câu 7.** Xét mô hình Input-Output gồm ba ngành với ma trận hệ số đầu vào

$$\begin{pmatrix} 0,1 & 0,4 & 0,2 \\ 0,3 & 0,2 & m \\ 0,2 & 0,1 & 0,3 \end{pmatrix}$$

với $m \in \mathbb{R}$ là tham số. Biết rằng giá trị sản lượng của ba ngành lần lượt là 200, 240, 120, và giá trị nguyên liệu ngành 2 cung cấp cho ngành 3 bằng hai lần giá trị nguyên liệu ngành 3 cung cấp cho ngành 2. Tính tổng giá trị nguyên liệu đầu vào của ngành 3.

- (A) 66. (B) 100. (C) 84. (D) 108.

🌀 **Lời giải.**

Cứ m nguyên liệu đầu vào ngành 2 cung cấp cho ngành 3 thì ngành 3 sản xuất được 1 sản lượng đầu ra. Mà sản lượng đầu ra của ngành 3 là 120 nên nguyên liệu đầu vào ngành 2 cung cấp cho ngành 3 là

$$120 \cdot m$$

Tương tự, cứ 0,1 nguyên liệu đầu vào ngành 3 cung cấp cho ngành 2 thì ngành 2 sản xuất được 1 sản lượng đầu ra. Mà sản lượng đầu ra của ngành 2 là 240 nên nguyên liệu đầu vào ngành 3 cung cấp cho ngành 2 là

$$0,1 \cdot 240$$

Từ hai điều này suy ra

$$120 \cdot m = 2 \cdot 0,1 \cdot 240 \implies m = \frac{48}{120} = 0,4$$

Giải thích tương tự, nguyên liệu đầu vào của ba ngành cung cấp cho ngành 3 là

$$120 \cdot (0,2 + 0,4 + 0,3) = 108$$

Chọn đáp án (D) ○

📖 **Câu 8.** Cho A là ma trận vuông cấp 3 thỏa mãn $A^T \cdot P_A = 4I_3$, trong đó P_A là ma trận phụ hợp của A . Khi đó $\det \left[\left(\frac{1}{4}A \right)^{-1} \right]$ là:

- (A) 1. (B) $\frac{1}{64}$. (C) $4 \left(\frac{3}{4} \right)$. (D) 16.

❖ Lời giải.

Ta có công thức của ma trận nghịch đảo

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} P_A$$

Nhân hai vế của phương trình cho A^T ta có

$$A^T \cdot A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^T \cdot P_A$$

Mà $A^T \cdot P_A = 4I$ nên ta có

$$A^T \cdot A^{-1} = \frac{1}{|A|} 4I \Rightarrow |A| A^T \cdot A^{-1} = 4I$$

Lấy định thức hai vế ta có

$$|A| A^T \cdot A^{-1} = |4I| \Rightarrow |A|^3 \cdot |A| \cdot \frac{1}{|A|} = 4^3$$

Nên $|A| = 4$, vậy khi này ta có

$$\det \left[\left(\frac{1}{4} A \right)^{-1} \right] = \det [4(A)^{-1}] = 4^3 \cdot \det(A^{-1}) = 4^3 \frac{1}{\det(A)} = 4^3 \frac{1}{4} = 16.$$

Chọn đáp án (D) ❖

📖 **Câu 9.** Xét hàm sản xuất $Q = K^{0,25} L^{0,75}$, trong đó Q là sản lượng, K là lượng vốn và L là lượng lao động. Ký hiệu MQK và MQL lần lượt là sản lượng biên theo vốn và theo lao động. Phát biểu nào sau đây là sai ?

- (A) Khi $K = L$ thì $MQK < MQL$. (B) Khi $K < L$ thì $MQK < \frac{1}{4}$.
(C) Khi $K = L$ thì $MQK + MQL = 1$. (D) Khi $K < L$ thì $MQL < \frac{3}{4}$.

❖ Lời giải.

Ta có:

$$MQK = Q'_K = (K^{0,25} L^{0,75})' = 0,25 \cdot K^{-0,75} L^{0,75} = 0,25 \cdot \sqrt[4]{\left(\frac{L}{K}\right)^3}$$

Mặt khác ta cũng có

$$MQL = Q'_L = (K^{0,25} L^{0,75})' = 0,75 \cdot K^{0,25} L^{-0,25} = 0,75 \cdot \sqrt[4]{\frac{K}{L}}$$

Vậy $K < L \Leftrightarrow 1 < \frac{L}{K}$ hay $MQK = 0,25 \cdot \sqrt[4]{\left(\frac{L}{K}\right)^3} > 0,25$.

Chọn đáp án (B) ❖

📖 **Câu 10.** Xét phương trình vi phân $y' - \frac{y}{x} = x \sin x$. Phát biểu nào sau đây là đúng ?

- (A) Mọi nghiệm của phương trình thỏa $y(-x) = y(x)$.
(B) Phương trình có nghiệm riêng $y = x \sin x$.
(C) Mọi nghiệm của phương trình thỏa $y(-x) = -y(x)$.
(D) Phương trình có nghiệm riêng $y = x \cos x$.

🌀 **Lời giải.**

Ta có:

$$\int \frac{-1}{x} = -\ln(x)$$

Nhân hai vế phương trình cho $\frac{1}{x}$, ta có

$$\frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = \sin x \Leftrightarrow \left(\frac{y}{x}\right)' = \sin x \Leftrightarrow \frac{y}{x} = -\cos x + C \Leftrightarrow y = -x \cos x + Cx$$

Vậy $y(-x) = -y(x)$.

Chọn đáp án (C) **○**

2 Phần Tự Luận

📖 **Câu 1.** Tìm giá trị của tham số m để hệ phương trình $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 3y - z = 2 \\ x + my - 2z = 1 \end{cases}$ có vô số nghiệm và tìm nghiệm tổng quát trong trường hợp đó.

🌀 **Lời giải.**

Ta thực hiện biến đổi sơ cấp

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & m & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_2 \rightarrow d_2 - 2d_1]{d_3 \rightarrow d_3 - d_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & m-1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

○ Xét $m = 1$ suy ra $R(A) = R(\bar{A}) = 3$ hay phương trình có nghiệm duy nhất

○ Xét $m \neq 1$ lấy $d_3 \rightarrow d_3 - (m-1)d_2$ ta có

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3(2-m) & 0 \end{pmatrix}$$

Phương trình có vô số nghiệm khi $\text{Rank}(A) = \text{Rank}(\bar{A}) = k < n = 3 \Leftrightarrow m = 2$. Hệ phương trình khi này tương đương

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ y - 3z = 0 \end{cases}$$

Chọn $z \in \mathbb{R}$ làm ẩn tự do, ta có

$$\begin{cases} x = 1 - y - z = 1 - 4z \\ y = 3z \end{cases}$$

Vậy nghiệm tổng quát của hệ phương trình là

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 4z \\ 3z \\ z \end{pmatrix}$$

Cách 2

Thực hiện pháp biến đổi sơ cấp ở trên ta tính được

$$D = 3(m-2)$$

Vậy hệ vô số nghiệm khi $m = 2$, thay vào giải tương tự.

☐ **Câu 2.** Một doanh nghiệp sản xuất hai loại sản phẩm A và B . Hàm lợi nhuận của doanh nghiệp được cho bởi $\pi(x, y) = 10x + 15y - x^2 - y^2 - xy$, trong đó x và y là lượng sản phẩm A và B tương ứng được sản xuất. Doanh nghiệp phải tuân thủ một ràng buộc về nguồn lực $2x + y = 100$. Hãy tìm mức lợi nhuận lớn nhất có thể bằng cách sử dụng phương pháp nhân tử Lagrange.

🌸 **Lời giải.**

Lập hàm *Lagrange* ta có:

$$L(x, y, \lambda) = 10x + 15y - x^2 - y^2 - xy + \lambda(100 - 2x - y)$$

Điều kiện cần, ta tính các đạo hàm cấp 1

$$\begin{cases} L'_x = 10 - 2x - y - 2\lambda = 0 \\ L'_y = 15 - 2y - x - \lambda = 0 \\ L'_\lambda = 100 - 2x - y = 0 \end{cases}$$

Từ phương trình 1 và 2, kết hợp phương trình (3) ta có hệ

$$\begin{cases} 2x + y = 100 \\ 3y = 20 \end{cases}$$

hay ta có: $y = \frac{20}{3}$, $x = \frac{100 - y}{2} = \frac{140}{3}$, $\lambda = -45$. Ta có

$$|\overline{H}| = \begin{pmatrix} 0 & g_1 & g_2 \\ g_1 & L_{11} & L_{12} \\ g_2 & L_{21} & L_{22} \end{pmatrix}$$

Trong đó

- g_i là hàm điều kiện đạo hàm (1 là x , 2 là y)
- L_{ij} là đạo hàm theo i , rồi đạo hàm theo j (đạo hàm 2 lần)

Ta có: $g_1 = -2$, $g_2 = -1$, $L_{11} = -2$, $L_{22} = -2$, $L_{12} = -1$, $L_{21} = -1$ hay

$$|\overline{H}| = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = -2 - 2 + 2 + 8 = 6 > 0$$

Vậy tại $(\frac{140}{3}, \frac{20}{3})$ hàm π đạt cực đại toàn cục, khi này giá trị của hàm là

$$\pi_{max} = \frac{-5900}{3}$$



☐ **Câu 3.** Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân $y'' - 4y' + 4y = (x + 2)e^{3x}$.

🌸 **Lời giải.**

Xét phương trình đặc trưng, ta có

$$k^2 - 4k + 4 = 0 \Rightarrow (k - 2)^2 = 0 \Rightarrow k = 2$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình vi phân tuyến tính cấp hai thuần nhất là

$$Y(x) = (C_1 + C_2 x)e^{2x}$$

Do 3 không phải là nghiệm của phương trình đặc trưng, nên nghiệm riêng có dạng là:

$$u(x) = (Ax + B)e^{3x}$$

Tính đạo hàm cấp 1 và cấp 2 của $u(x)$:

$$\begin{cases} u'(x) = Ae^{3x} + 3(Ax + B)e^{3x} = (3Ax + 3B + A)e^{3x} \\ u''(x) = 3Ae^{3x} + 3(3Ax + 3B + A)e^{3x} = (9Ax + 9B + 6A)e^{3x} \end{cases}$$

Thay vào phương trình ban đầu ta có

$$\begin{aligned} u'' - 4u' + 4u &= (9Ax + 9B + 6A)e^{3x} - 4(3Ax + 3B + A)e^{3x} + 4(Ax + B)e^{3x} \\ &= [(9A - 12A + 4A)x + (9B - 12B + 4B) + (6A - 4A)]e^{3x} \\ &= (Ax + B + 2A)e^{3x} \end{aligned}$$

So sánh với vế phải, đồng nhất hệ số ta có hệ sau:

$$\begin{cases} A = 1 \\ B + 2A = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 0 \end{cases}$$

Vậy nghiệm riêng là:

$$u(x) = xe^{3x}$$

Nghiệm tổng quát của phương trình là:

$$\boxed{y(x) = (C_1 + C_2 x)e^{2x} + xe^{3x} .}$$



LỜI GIẢI TOÁN CAO CẤP K50 ĐỢT 1 MÃ ĐỀ KHÁC

1 Phần Trắc Nghiệm

☐ **Câu 1.** Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân $y' + \frac{y}{x} = \frac{\sin x}{x}$ là

(A) $\frac{C + \cos x}{x}, C \in \mathbb{R}.$

(B) $x(C + \cos x), C \in \mathbb{R}.$

(C) $\frac{C - \cos x}{x}, C \in \mathbb{R}.$

(D) $x(C + \sin x), C \in \mathbb{R}.$

✿ **Lời giải.**

Phương trình ban đầu tương đương với

$$xy' + y = \sin x \Leftrightarrow (xy)' = \sin x$$

Mà ta có:

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

Suy ra nghiệm tổng quát của phương trình vi phân là: $y = \frac{C - \cos x}{C}, C \in \mathbb{R}.$

Chọn đáp án (C) **Đ**

☐ **Câu 2.** Cho $g(x) = f(x^3 - 3x)$ khả vi trên $\mathbb{R}$ và $f'(x) > 0, \forall x$. Chọn phát biểu đúng.

(A) Hàm g đạt cực đại tại -1 .

(B) Hàm g đạt cực đại tại 1 .

(C) Hàm g tăng trên $(0, +\infty)$.

(D) Hàm g giảm trên $(-\infty, -3)$.

✿ **Lời giải.**

Do $g(x)$ khả vi trên $\mathbb{R}$ nên ta có:

$$g'(x) = (x^3 - 3x)' \cdot f'(x^3 - 3x) = (3x^2 - 3)f'(x^3 - 3x)$$

Vì $f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên $g'(x) = 0$ tương đương với $3x^2 - 3 = 0$, hay $x = \pm 1$. Ta có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm g đạt cực đại tại -1 .

Chọn đáp án (A) ○

☐ **Câu 3.** Cho A và B là các ma trận vuông cấp n thỏa $A^2 = I_n = B^2$. Chọn phát biểu sai.

(A) $(AB)^{-1} = BA$.

(B) $AB^{-1} = A^{-1}B$.

(C) $A = \pm B$.

(D) $|\det(A)| = |\det(B)|$.

✿ **Lời giải.**

Do $A^2 = B^2 = I_n$ nên $A = A^{-1}$ và $B = B^{-1}$. Ta xét từng đáp án

○ Xét (A) ta có: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = BA$ vậy (A) đúng.

○ Xét (B) ta có: $AB^{-1} = A^{-1}B$ vậy (B) đúng.

○ Xét (C) Xét ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ nhưng $A \neq \pm B$ vậy (C) sai.

○ Xét (D) ta có: $A^2 = B^2 \Rightarrow \det(A^2) = \det(B^2)$ hay $|\det(A)| = |\det(B)|$ vậy (D) đúng.

Chọn đáp án (C) ○

☐ **Câu 4.** Giả sử giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$z = f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - my + 2m \quad (m \text{ là tham số})$$

có giá trị bằng z_M và đạt được tại điểm $M(1, 1)$. Chọn phát biểu đúng.

(A) $z_M = 3$.

(B) $z_M = 4$.

(C) $z_M = -3$.

(D) $z_M = -4$.

✿ **Lời giải.**

Ta có:

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = -2x + y - 3 = 0 \\ f'_y(x, y) = x + 2y - m = 0 \end{cases}$$

do điểm dừng là $(1, 1)$ nên $m = 3$. Thay lại vào đề bài ta có $z_m = 3$.

Chọn đáp án (A) ○

☐ **Câu 5.** Trong mô hình Input - Output mở, cho ma trận hệ số đầu vào

$$A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,3 & 0,3 \\ 0,2 & 0,2 & 0,2 \\ 0,3 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix}$$

Biết ngành 3 cung cấp 60 (đvt) cho ngành 2, Khi đó ngành 2 phải cung cấp cho chính nó là

(A) 30.

(B) 20.

(C) 40.

(D) 50.

✿ **Lời giải.**

Cứ 0,3 đơn vị mà ngành 3 cung cho ngành 2 thì ngành 2 sản xuất được 1 đơn vị, mà ngành 3 cung cấp 60 cho ngành 2 nên ngành 2 sản xuất được

$$60 : 0,3 = 200 \text{ (đvt)}$$

Lập luận tương tự suy ra ngành 2 phải cung cấp cho chính nó $200 \cdot 0,2 = 40 \text{ (đvt)}$.

Chọn đáp án (C) ○

- ☐ **Câu 6.** Cho hệ (I): $\begin{cases} x + y + 2z = 2m \\ mx - y + 4z = -3 \\ 2mx - 3y + 4z = m \end{cases}$. Hệ (I) có nghiệm duy nhất nếu và chỉ nếu
- (A) $m \neq -4$. (B) $m \neq 2$. (C) $m = 2$. (D) $m \neq 4$.

☘ **Lời giải.**

Hệ có nghiệm duy nhất nếu và chỉ nếu $|A| \neq 0$ mà ta có

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ m & -1 & 4 \\ 2m & -3 & 4 \end{vmatrix} = 2m + 8$$

Vậy $2m + 8 \neq 0$, hay $m \neq -4$.

Chọn đáp án (A) **○**

- ☐ **Câu 7.** Cho hàm số $u(x, y)$ có các đạo hàm riêng cấp một liên tục trên $\mathbb{R}^2$. Giả sử ta có điều kiện

$$6x^2 + 5y^2 = 230 \quad (1)$$

Điều kiện cần để u đạt cực trị tại (x, y) thỏa điều kiện (1) là

- (A) $6yu'_x = 5xu'_y$. (B) $5xu'_x = 6yu'_y$.
(C) Các đáp án kia đều sai. (D) $5yu'_x = 6xu'_y$.

☘ **Lời giải.**

Lập hàm *Lagrange* ta có:

$$L(x, y, \lambda) = u(x, y) + \lambda(230 - 6x^2 - 5y^2)$$

Điều kiện cần

$$\begin{cases} L_x = u'_x - 12x\lambda = 0 \\ L_y = u'_y - 10y\lambda = 0 \\ L_\lambda = 230 - 6x^2 - 5y^2 = 0 \end{cases}$$

Từ phương trình 1 và 2 ta có $u'_x = 12x\lambda$, $u'_y = 10y\lambda$. Suy ra

$$u'_x \cdot (10y\lambda) = u'_y \cdot (12x\lambda)$$

hay $5yu'_x = 6xu'_y$.

Chọn đáp án (D) **○**

- ☐ **Câu 8.** Cho A là ma trận vuông cấp 4 thỏa $(A^T)^3 A = 3I_4$. Định thức của $\left[\frac{1}{6}A^T\right]^{-1}$ có giá trị

- (A) 432. (B) ± 432 . (C) -216. (D) ± 216 .

☘ **Lời giải.**

Do $(A^T)^3 A = 3I_4$ nên $|(A^T)^3 A| = |3I_4|$ suy ra $|A|^4 = 3^4$, hay $|A| = \pm 3$. Vậy

$$\det\left(\left[\frac{1}{6}A^T\right]^{-1}\right) = \det\left(6(A^T)^{-1}\right) = 6^4 \frac{1}{\det(A)} = \pm 432$$

Chọn đáp án (B) **○**

📌 **Câu 9.** Hàm tổng chi phí khi sản xuất một sản phẩm cho bởi $C = \frac{3Q^2}{\sqrt{Q^2+5}} + 1000$, với Q là sản lượng. Tính chi phí biên khi $Q = 10$ (làm tròn kết quả đến 2 chữ số thập phân).

Ⓐ 4,32.

Ⓑ 4,75.

Ⓒ 3,07.

Ⓓ 5,12.

💡 **Lời giải.**



Chọn đáp án Ⓒ Ⓞ

📌 **Câu 10.** Giả sử $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ là nghiệm của hệ phương trình

$$(*) \begin{cases} -x_1 - 2x_2 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 = -1 \end{cases}$$

Gọi A là ma trận hệ số của (*). Tính $A^{2025}x$.

Ⓐ $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Ⓑ $\begin{bmatrix} 2025 \\ 2024 \end{bmatrix}$.

Ⓒ $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Ⓓ $\begin{bmatrix} 2024 \\ 2025 \end{bmatrix}$.

💡 **Lời giải.**

Giải hệ ta có $x_1 = 1, x_2 = -1$ vậy ta có

$$Ax = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Từ đây ta nhân tiếp tục A suy ra

$$A^2x = A(Ax) = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Thực hiện tương tự nhiều lần ta được

$$A^n x = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Hay $A^{2025}x = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Chọn đáp án Ⓒ Ⓞ

2 Phần Tự Luận

☐ Câu 1. Cho phương trình vi phân

$$y'' + y = (x - 3)e^{2x} \quad (1)$$

- a) Tìm nghiệm tổng quát $y = \phi(x, C_1, C_2)$ với $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ của (1).
b) Tìm nghiệm riêng $y = f(x)$ của (1) thỏa $f(0) = 2$ và $f'(0) = -1$.

🌀 **Lời giải.**

a) Xét phương trình đặc trưng, ta có

$$k^2 + 1 = 0 \Rightarrow k = \pm i$$

Vậy nghiệm tổng quát phương trình vi phân tuyến tính cấp hai thuần nhất là

$$Y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

Do 2 không phải là nghiệm của phương trình đặc trưng, nên nghiệm riêng có dạng là

$$u(x) = (Ax + B)e^{2x}$$

Ta tính các đạo hàm cấp 1 và cấp 2 của nghiệm riêng

$$\begin{cases} u'(x) = Ae^{2x} + 2(Ax + B)e^{2x} = (2Ax + A + 2B)e^{2x} \\ u''(x) = 2Ae^{2x} + 2(2Ax + A + 2B)e^{2x} = (4Ax + 4B + 4A)e^{2x} \end{cases}$$

Thay vào phương trình ban đầu ta có

$$u''(x) + u(x) = (4Ax + 4B + 4A)e^{2x} + (Ax + B)e^{2x} = (5Ax + 5B + 4A)e^{2x}$$

So sánh với vế phải, đồng nhất hệ số ta có hệ sau:

$$\begin{cases} 5A = 1 \\ 5B + 4A = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{5} \\ B = -\frac{19}{25} \end{cases}$$

Vậy nghiệm riêng có dạng là:

$$u(x) = \left(\frac{1}{5}x - \frac{19}{25}\right)e^{2x}$$

Nghiem tổng quát của phương trình vi phân tuyến tính cấp hai không thuần nhất là

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \left(\frac{1}{5}x - \frac{19}{25}\right)e^{2x}$$

b) Do $f(0) = 2$ nên ta có

$$y(0) = C_1 - \frac{19}{25} = 2 \Rightarrow C_1 = \frac{69}{25}$$

Đạo hàm cấp 1 của nghiệm tổng quát là

$$y'(x) = -C_1 \sin x + C_2 \cos x + \left(\frac{1}{5} + 2\left(\frac{1}{5}x - \frac{19}{25}\right)\right) e^{2x}$$

Tại $x = 0$ ta có $y'(0) = -1$ nên

$$-1 = y'(0) = C_2 + \frac{1}{5} - \frac{38}{25} = C_2 - \frac{33}{25} \Rightarrow C_2 = \frac{8}{25}$$

Vậy nghiệm riêng thỏa mãn các điều kiện đề bài là

$$y(x) = \frac{69}{25} \cos x + \frac{8}{25} \sin x + \left(\frac{1}{5}x - \frac{19}{25}\right) e^{2x}$$



📌 **Câu 2.** Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + 3y + 2z = -1 \\ 2x + 4y + mz = 2 \\ x + my - z = 3 \end{cases}$$
. Tìm m để hệ phương trình có vô số nghiệm và tìm nghiệm tổng quát trong trường hợp đó.

🌀 **Lời giải.**

Ta thực hiện biến đổi sơ cấp

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & m & 2 \\ 1 & m & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_2 \rightarrow d_2 - 2d_1]{d_3 \rightarrow d_3 - d_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & m-4 & 4 \\ 0 & m-3 & -3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_2 \rightarrow d_2 \cdot (-2)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{4-m}{2} & -2 \\ 0 & m-3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

○ Xét $m = 3$ suy ra $R(A) = R(\overline{A}) = 3$, hay hệ có nghiệm duy nhất.

○ Xét $m \neq 3$, ta lấy $d_3 \rightarrow d_3 - (m-3)d_2$ ta có:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{4-m}{2} & -2 \\ 0 & 0 & \frac{(m-1)(m-6)}{2} & 2(m-1) \end{pmatrix}$$

○ Xét $m = 6$ suy ra $2 = R(A) \neq R(\overline{A}) = 3$ nên phương trình vô nghiệm.

○ Xét $m = 1$ suy ra $R(A) = R(\overline{A}) = 2 < 3$ nên hệ phương trình có vô số nghiệm.

Hệ phương trình khi đó tương đương

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = -1 \\ y + \frac{3}{2}z = -2 \end{cases}$$

Chọn $z \in \mathbb{R}$ làm ẩn tự do, ta có:

$$\begin{cases} x = -1 - 3y - 2z = 5 + \frac{5}{2}z \\ y = -2 - \frac{3}{2}z \end{cases}$$

Vậy nghiệm tổng quát của hệ phương trình là

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 + \frac{5}{2}z \\ -2 - \frac{3}{2}z \\ z \end{pmatrix}$$



📌 **Câu 3.** Dùng phương pháp nhân tử Lagrange, tìm cực trị của $f(x, y) = x + 2y + 3$ thỏa điều kiện $x^{1/2}y^{1/2} = 4$.

🌀 **Lời giải.**

Lập hàm *Lagrange* ta có

$$L(x, y, \lambda) = x + 2y + 3 + \lambda(4 - x^{1/2}y^{1/2})$$

Điều kiện cần, ta tính các đạo hàm cấp 1

$$\begin{cases} L'_x = 1 - \frac{1}{2}\lambda y^{1/2}x^{-1/2} = 0 \\ L'_y = 2 - \frac{1}{2}\lambda x^{1/2}y^{-1/2} = 0 \\ L'_\lambda = 4 - x^{1/2}y^{1/2} = 0 \end{cases}$$

Từ hai phương trình (1) và (2) suy ra

$$\begin{cases} 1 = \frac{1}{2}\lambda y^{1/2}x^{-1/2} \\ 2 = \frac{1}{2}\lambda x^{1/2}y^{-1/2} \end{cases}$$

Chia hai vế của phương trình về theo vế kết hợp với phương trình (3), ta có: $y = 2\sqrt{2}$, $x = 4\sqrt{2}$, $\lambda = 2\sqrt{2}$. Tính các đạo hàm cấp hai tại điểm dừng, ta có:

$$g_1 = -\frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad g_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad L_{11} = \frac{\sqrt{2}}{16}, \quad L_{22} = \frac{\sqrt{2}}{4}, \quad L_{12} = L_{21} = -\frac{\sqrt{2}}{8}.$$

thay vào định thức

$$|\overline{H}| = \begin{vmatrix} 0 & g_1 & g_2 \\ g_1 & L_{11} & L_{12} \\ g_2 & L_{21} & L_{22} \end{vmatrix}$$

ta có giá trị của định thức bằng

$$|\overline{H}| = -\frac{\sqrt{2}}{8} < 0.$$

Vậy tại $(4\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ hàm f đạt cực tiểu địa phương. Giá trị của hàm f tại điểm này là

$$f(x, y) = 4\sqrt{2} + 4\sqrt{2} + 3 = 8\sqrt{2} + 3$$



LỜI GIẢI TOÁN CAO CẤP K50 ĐỢT 2

1 Phần Trắc nghiệm

□ **Câu 1.** Hàm cầu của một sản phẩm được cho bởi $Q = \sqrt{500 - 4P}$ (P là giá bán và Q là lượng cầu sản phẩm). Ta ký hiệu $\varepsilon(P)$ là hệ số co giãn của lượng cầu theo giá tại mức giá P . Gọi R_0 là doanh thu khi $|\varepsilon(P)| = 2$. Giá trị của R_0 là

(A) 2100.

(B) 1000.

(C) 2125.

(D) 500.

✿ **Lời giải.**

Ta tính hệ số co giãn:

$$\begin{aligned}\varepsilon(P) &= \frac{dQ}{dP} \cdot \frac{P}{Q} \\ &= \frac{-4}{2\sqrt{500 - 4P}} \cdot \frac{P}{\sqrt{500 - 4P}} \\ &= \frac{-2P}{500 - 4P}\end{aligned}$$

mà $|\varepsilon(P)| = 2$ nên $\left| \frac{-2P}{500 - 4P} \right| = 2$ suy ra $P = \frac{500}{3}$ hoặc $P = 100$ mà do $P \leq \frac{500}{4}$ nên $P = 100$. Vậy giá trị doanh thu R_0 là

$$R_0 = P_0 \cdot Q_0 = 100 \cdot \sqrt{500 - 4 \cdot 100} = 1000$$

Chọn đáp án (B) **D**

□ **Câu 2.** Chi phí C phụ thuộc vào sản lượng Q và thỏa mãn phương trình $C^2 - 2CQ + Q^2 - 2Q - 4800 = 0$. Chi phí biên tại $Q = 50$ là

(A) $\frac{9}{14}$.

(B) $\frac{70}{63}$.

(C) $\frac{71}{70}$.

(D) $\frac{14}{11}$.

✿ **Lời giải.**

Tại $Q = 50$ ta có phương trình

$$C(50)^2 - 100C(50) + 50^2 - 2 \cdot 50 - 4800 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} C(50) = 120 \\ C(50) = -20 \end{cases}$$

Đạo hàm theo Q của phương trình ta có:

$$2C(Q) \cdot C'(Q) - 2C(Q) - 2Q \cdot C'(Q) + 2Q - 2 = 0$$

Ta rút $C'(Q)$ theo $C(Q)$ và Q , ta có:

$$C'(Q) = \frac{C(Q) + 1 - Q}{C(Q) - Q}$$

Chi phí biên tại $Q = 50$ là

$$C'(50) = \frac{120 + 1 - 50}{120 - 50} = \frac{71}{70}$$

Chọn đáp án (C) ❖

📌 **Câu 3.** Xét phương trình ma trận: $AX = B$, trong đó $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ m & 4 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$, với m là tham số thực. Tìm giá trị của m để phương trình đã cho có nghiệm.

- (A) $m = 2$. (B) Không tồn tại m . (C) $m \neq 2$. (D) m tùy ý.

❖ **Lời giải.**

Phương trình $AX = B$ có nghiệm khi $R(A) = R(A|B)$. Ta xét ma trận $A|B$

$$A|B = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & -1 & 3 \\ m & 4 & -2 & 6 \end{array} \right)$$

- Xét $m = 0$ suy ra $R(A) = R(\overline{A}) = 2$ nên phương trình có nghiệm.
- Xét $m \neq 0$ lấy $d_2 \rightarrow d_2 - md_1$ ta có

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 - 2m & -2 + m & 6 - 3m \end{array} \right)$$

- Nếu $m = 2$ suy ra $R(A) = R(\overline{A}) = 1$ nên phương trình có nghiệm.
- Xét $m \neq 2$ suy ra $R(A) = R(\overline{A}) = 2$ nên phương trình có nghiệm.

Vậy với m tùy ý thì phương trình đã cho có nghiệm.

Chọn đáp án (D) ❖

📌 **Câu 4.** Cho A và B là các ma trận vuông cấp 4 với $\text{rank}(A) = 4$ và $\text{rank}(B) < 4$. Chọn kết luận đúng.

- (A) $\det(B^T \cdot A^3) \neq 0$.
 (B) Ma trận $C = B^2 + 4B$ là khả nghịch.
 (C) Ma trận $D = A^2B + AB^2$ có hạng $\text{rank}(D) < 4$.
 (D) Phương trình $AX = B$ vô nghiệm.

❖ **Lời giải.**

Do $R(A) = 4$ nên $|A| \neq 0$ và $R(B) < 4$ nên $|B| = 0$. Ta xét từng đáp án

- Xét (A) ta có $\det(B^T \cdot A^3) = \det B \cdot (\det A)^3 = 0$ vậy (A) sai.
- Xét (B) ta có $|C| = |B^2 + 4B| = |B| \cdot |B + 4I| = 0$ vậy C không khả nghịch hay (B) sai.
- Xét (C) ta có $|D| = |A| \cdot |B| \cdot |(A + B)| = 0$ nên $\text{rank}(D) < 4$ hay (C) đúng.
- Xét (D) do $|A| \neq 0$ nên tồn tại A^{-1} hay phương trình $AX = B$ có nghiệm vậy (D) sai.

Chọn đáp án (C) ○

☐ **Câu 5.** Cho hệ phương trình tuyến tính (I):
$$\begin{cases} 3x + (2m - 1)y - 2z = -2 \\ 2x + (m - 1)y - z = 3 \\ -x - y - z = -m \end{cases} \quad \text{với } m \in \mathbb{R} \text{ là tham số.}$$
 Tìm m để hệ (I) vô nghiệm hoặc có vô số nghiệm.

- (A) $m = 3$. (B) $m = -1$. (C) Không tồn tại m . (D) $m = -3$.

☘ **Lời giải.**

Hệ vô nghiệm hoặc có vô số nghiệm khi và chỉ khi $|A| = 0$. Mà ta có

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2m - 1 & -2 \\ 2 & m - 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = m + 3$$

Vậy $m + 3 = 0$ hay $m = -3$.

Chọn đáp án (D) ○

☐ **Câu 6.** Xét phương trình vi phân $y' + \frac{2y}{x} = \frac{e^x}{x^2}$ (1). Chọn phát biểu đúng.

- (A) Phương trình (1) có một nghiệm riêng thỏa điều kiện $y(1) = 2e$ là $y = (e^x - 2e)x^{-2}$.
 (B) Mọi nghiệm $y(x)$ của phương trình (1) đều thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = 0$.
 (C) Phương trình (1) có nghiệm tổng quát là $y = (2e^x + C)x^{-2}$.
 (D) Mọi nghiệm $y(x)$ của phương trình (1) đều thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 0$.

☘ **Lời giải.**

Nhân hai vế cho x^2 ta có

$$x^2 y' + 2xy = e^x \Leftrightarrow (x^2 y)' = e^x$$

mà ta có

$$\int e^x dx = e^x + C$$

Suy ra nghiệm tổng quát của phương trình vi phân là: $y = \frac{e^x + C}{x^2}$, $\forall C \in \mathbb{R}$. Ta xét từng đáp án

- Xét (A) ta có $2e = y(1) = e + C$ hay $C = e$ vậy $y = (e^x + e)x^{-2}$ suy ra (A) sai.
- Xét (B) ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + C}{x^2} = 0$ vậy (B) đúng.
- Xét (C) ta có nghiệm tổng quát là $y = (e^x + C)x^{-2}$ hay (C) sai.
- Xét ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + C}{x^2} = +\infty$ vậy (D) sai.

Chọn đáp án (B) ○

☐ **Câu 7.** Cho hàm sản xuất $Q(L, K) = 8L^{0,3}K^{0,6}$ với L là lượng lao động và K là vốn. Khi K tăng 1,5% và L không đổi thì Q tăng xấp xỉ

- (A) 0,1%. (B) 0,9%. (C) 0,45%. (D) 1,55%.

☘ **Lời giải.**

Ta tính hệ số co giãn của Q theo K là

$$\varepsilon = \frac{dQ}{dK} \cdot \frac{K}{Q} = 8 \times 0,6 L^{0,3} K^{-0,4} \frac{K}{8 L^{0,3} K^{0,6}} = 0,6$$

Vậy khi K tăng 1,5% thì Q tăng 0,9%.

Chọn đáp án (B) ⓐ

📌 **Câu 8.** Xét hàm số $f(x, y) = x^2 y(1 - x - y)$ và điểm $M(1, 0)$. Chọn kết luận đúng.

- (A) Hàm số f đạt cực đại tại M .
- (B) M không phải là điểm dừng của f .
- (C) Hàm số f đạt cực trị tại điểm M .
- (D) M là điểm dừng nhưng không phải là cực trị của f .

🌀 **Lời giải.**

Ta tính các đạo hàm cấp 1

$$\begin{cases} f_x = xy(2 - 3x - 2y) = 0 \\ f_y = x^2(1 - x - 2y) = 0 \end{cases}$$

Vậy $M(1, 0)$ là điểm dừng. Ta tính các đạo hàm cấp 2

$$\begin{cases} f_{xx} = y(2 - 6x - 2y) \\ f_{yy} = -2x^2 \end{cases}$$

Ta có: $D_2 = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} = f_{xx} \times f_{yy} - f_{xy}^2$ mà tại điểm dừng $M(1, 0)$ thì ta có

$$\begin{cases} f_{xx} = 0 \\ f_{yy} = -2 \end{cases}$$

suy ra $D_2 = -f_{xy}^2 < 0$ nên M không phải là cực trị của f .

Chọn đáp án (D) ⓐ

📌 **Câu 9.** Trong mô hình Input-Output của Leontief, cho ma trận hệ số đầu vào

$$A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,3 \\ 0,2 & 0,3 & m \\ 0,3 & 0,2 & 0,1 \end{pmatrix}$$

Biết rằng giá trị sản lượng của ngành 2 và ngành 3 lần lượt là 200 và 150 ; tổng giá trị nguyên liệu đầu vào của ngành 3 là 75 . Tính tổng giá trị nguyên liệu mà ngành 2 cung cấp cho ngành 3 và ngành 3 cung cấp cho ngành 2.

- (A) 55.
- (B) 60.
- (C) 50.
- (D) 65.

🌀 **Lời giải.**

Tổng giá trị nguyên liệu đầu vào của ngành 3 là 75 nên

$$150(0,3 + 0,1 + m) = 75 \Leftrightarrow m = 0,1$$

Tổng giá trị nguyên liệu mà ngành 2 cung cấp cho ngành 3 là

$$150 \times 0,1 = 15$$

Tổng giá trị nguyên liệu mà ngành 3 cung cấp cho ngành 2 là

$$200 \times 0,2 = 40$$

Vậy tổng giá trị nguyên liệu mà ngành 2 cung cấp cho ngành 3 và ngành 3 cung cấp cho ngành 2 là

$$40 + 15 = 55$$

Chọn đáp án (A) 

☐ **Câu 10.** Cho A là ma trận vuông cấp 3 thỏa mãn $A^2 P_A = 16I_3$, trong đó P_A là ma trận phụ hợp của A . Định thức của ma trận $3A^T$ có giá trị là:

(A) ± 216 .

(B) 216.

(C) ± 108 .

(D) -108 .

 **Lời giải.**

Ta có công thức tính ma trận nghịch đảo là

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} P_A$$

Nhân hai vế của ma trận cho A^2 ta có

$$A = \frac{1}{|A|} A^2 P_A$$

mà $A^2 P_A = 16I_3$ nên ta có

$$A = \frac{1}{|A|} 16I \Leftrightarrow |A|A = 16I$$

Lấy định thức hai vế ta có

$$|A|^4 = 16^3$$

vậy $|A| = \pm 8$. Do đó định thức của ma trận $3A^T$ có giá trị là

$$|3A^T| = 3^3 |A| = \pm 216$$

Chọn đáp án (A) 

2 Phần Tự Luận

☐ **Câu 1.** Cho hệ phương trình sau với $m \in \mathbb{R}$ là tham số:
$$\begin{cases} -x + y + 2z - t = 1 \\ -4x + 3y + 3z = m \\ -x + 2y + (m+6)z - 5t = 3 \end{cases}$$

- a) Giải hệ trên với $m = 3$.
b) Tìm m để hệ đã cho có nghiệm.

☐ **Lời giải.**

a) Thực hiện biến đổi sơ cấp:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ -4 & 3 & 3 & 0 & m \\ -1 & 2 & m+6 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_1 \rightarrow -d_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 & -1 \\ -4 & 3 & 3 & 0 & m \\ -1 & 2 & m+6 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{d_2 \rightarrow d_2 + 4d_1 \\ d_3 \rightarrow d_3 + d_1}]{\substack{d_2 \rightarrow d_2 + 4d_1 \\ d_3 \rightarrow d_3 + d_1}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -5 & 4 & m-4 \\ 0 & 1 & m+4 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{d_3 \rightarrow d_3 + d_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -5 & 4 & m-4 \\ 0 & 0 & m-1 & 0 & m-2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Xét với $m = 3$, ta có hệ:

$$\begin{cases} x - y - 2z + t = -1 \\ -y - 5z + 4t = -1 \\ 2z = 1 \end{cases}$$

Chọn $t \in \mathbb{R}$ làm ẩn tự do, ta có hệ

$$\begin{cases} x = -\frac{3}{2} + 3t \\ y = -\frac{3}{2} + 4t \\ z = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy nghiệm tổng quát của hệ phương trình là:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} + 3t \\ -\frac{3}{2} + 4t \\ \frac{1}{2} \\ t \end{pmatrix}$$

b) Nếu $m \neq 1$, thì: $\text{Rank}(A) = \text{Rank}(\bar{A}) = 3 < 4$, hay hệ có nghiệm.



📌 **Câu 2.** Dùng phương pháp nhân tử Lagrange, tìm cực trị của hàm số $f(x, y) = x^{1/2}y^{1/2}$ với ràng buộc $x + 2y = 100$.

🌀 **Lời giải.**

Lập hàm Lagrange, ta có:

$$L(x, y, \lambda) = x^{1/2}y^{1/2} + \lambda(100 - x - 2y)$$

Điều kiện cần, Tính đạo hàm cấp 1:

$$\begin{cases} L'_x = \frac{1}{2}x^{-1/2}y^{1/2} - \lambda = 0 \\ L'_y = \frac{1}{2}x^{1/2}y^{-1/2} - 2\lambda = 0 \\ L'_\lambda = 100 - x - 2y = 0 \end{cases}$$

Từ hai phương trình (1) và (2) suy ra

$$\begin{cases} \lambda = \frac{1}{2}y^{1/2}x^{-1/2} \\ 2\lambda = \frac{1}{2}x^{1/2}y^{-1/2} \end{cases}$$

Chia hai vế của phương trình về theo vế kết hợp với phương trình (3), ta có: $x = 50$, $y = 25$, $\lambda = \frac{1}{2\sqrt{2}}$. Điều kiện đủ ta tính các đạo hàm cấp hai, ta có:

$$g_1 = -1, \quad g_2 = -2, \quad L_{11} = -\frac{1}{4}x^{-3/2}y^{1/2}, \quad L_{22} = -\frac{1}{4}x^{1/2}y^{-3/2}, \quad L_{12} = L_{21} = \frac{1}{4}x^{-1/2}y^{-1/2}.$$

thay các giá trị vào định thức

$$|\overline{H}| = \begin{pmatrix} 0 & g_1 & g_2 \\ g_1 & L_{11} & L_{12} \\ g_2 & L_{21} & L_{22} \end{pmatrix}$$

ta có

$$|\overline{H}| = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & -\frac{1}{4}x^{-3/2}y^{1/2} & \frac{1}{4}x^{-1/2}y^{-1/2} \\ -2 & \frac{1}{4}x^{-1/2}y^{-1/2} & -\frac{1}{4}x^{1/2}y^{-3/2} \end{vmatrix}$$

Vậy định thức bằng

$$|\overline{H}| = \frac{1}{4}x^{1/2}y^{-3/2} + x^{-1/2}y^{-1/2} + x^{-3/2}y^{1/2}$$

do $|\overline{H}| > 0$, $\forall x, y > 0$ nên f đạt cực đại toàn cục tại $M(50, 25)$. Giá trị của hàm số khi này là

$$f = \sqrt{50 \cdot 25} = 25\sqrt{2}$$



☐ **Câu 3.** Giải phương trình vi phân: $y'' - 2y' + y = (x + 1)e^{2x}$.

🌸 **Lời giải.**

Xét phương trình đặc trưng, ta có

$$k^2 - 2k + 1 = 0 \implies (k - 1)^2 = 0 \implies k = 1.$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình vi phân tuyến tính cấp hai thuần nhất là

$$Y(x) = (C_1 + C_2x)e^x.$$

Do 2 không phải là nghiệm của phương trình đặc trưng, nên nghiệm riêng có dạng

$$u(x) = (Ax + B)e^{2x}.$$

Ta tính các đạo hàm cấp 1 và cấp 2 của nghiệm riêng

$$\begin{cases} u'(x) = Ae^{2x} + 2(Ax + B)e^{2x} = (2Ax + A + 2B)e^{2x} \\ u''(x) = 2Ae^{2x} + 2(2Ax + A + 2B)e^{2x} = (4Ax + 4B + 4A)e^{2x} \end{cases}$$

Thay vào phương trình ban đầu ta có

$$u'' - 2u' + u = [4Ax + 4B + 4A - 2(2Ax + A + 2B) + Ax + B]e^{2x} = (Ax + 2A + B)e^{2x}.$$

So sánh với vế phải $(x + 1)e^{2x}$, đồng nhất hệ số ta có:

$$\begin{cases} A = 1 \\ 2A + B = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \end{cases}$$

Vậy nghiệm riêng là

$$u(x) = (x - 1)e^{2x}.$$

Nghiem tổng quát của phương trình vi phân đã cho là

$$\boxed{y(x) = (C_1 + C_2x)e^x + (x - 1)e^{2x}.$$

